

GENERAL LIBRARY
OCT 13 1920
UNIV. OF MICH.

ANNALEN.

DER

PHYSIK.

SEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. K. WIEDMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 62. Heft 6.

DER GANZEN REIHE 367. BANDES 6. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1920 erscheinen Bd. 61, 62 und 63 à 8 Hefte. Preis von Bd. 61 u. 62 je M 45.—.

Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 16. Juli 1920.

Inhalt.

	Seite
1. H. Barkhausen und H. Lichte. Quantitative Unterwasserschallversuche	485
2. H. Dember und M. Uibe. Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdshattens in der Atmosphäre	517
3. Günther Thilo. Der Strahlungsdruck auf Kreiszylinder aus beliebigem Material	531
4. J. Wallot. Kinematische und energetische Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen	569

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an dem auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzusechnnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „**Fortschritten der Physik**“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. Quantitative Unterwasserschallversuche; von H. Barkhausen und H. Lichte.

(Mitteilungen aus dem Laboratorium der Torpedoinspektion.)

I. Das Problem.

Die Schallerzeugung im Wasser und die im Vergleich zur Luft ziemlich gute Fähigkeit des Wassers, den Schall auf große Entferungen zu übertragen, ist seit langem bekannt. Schon Leonardo da Vinci hatte die Erfahrung gemacht, daß man Schiffe auf See mittels einer in das Wasser gesteckten Tuba hört. Er schreibt darüber: „Wenn Du Dein Schiff anhalten wirst und den Kopf eines Sprachrohres auf das Wasser setzen und das andere Ende an Dein Ohr, so wirst Du Schiffe hören, die recht weit von Dir entfernt sind.“¹⁾ Es sei ferner auf die Versuche von Beudant (1820), sowie von Sturm und Colladon²⁾ auf dem Genfer See (1827) hingewiesen, die mit ganz einfachen Mitteln schon eine Reichweite von 15 km, später sogar von 35 km erzielten. In neuerer Zeit, seit etwa 20 Jahren, sind die Unterwasserschallsignale auch praktisch in der Marine zum Ansteuern von mit Unterwasserglocken ausgerüsteten Feuerschiffen verwandt worden und zwar mit gutem Erfolge. In der Kriegsmarine erhielten sie eine ganz besondere Bedeutung mit der erhöhten Verwendungsfähigkeit der Unterseeboote. Waren sie doch für diese im getauchten Zustande zunächst das einzige Mittel, sich mit der Außenwelt zu verständigen.

Längere Zeit dachte man sogar in der Marine an die

1) Leonardo da Vinci, Der Denker, Forscher und Poet. Auswahl von Marie Herzfeld. S. 43. Fortpflanzung des Schalles in flüssigen und in festen Körpern. 3. Aufl. Jena 1911. Eugen Diederichs.

2) Colladon et Sturm: Ann. chim. et phys. (2) 36. S. 113, 225. 1827; Pogg. Ann. 12. S. 39, 161. 1828. Beudant: von Colladon und Sturm erwähnt.

Möglichkeit, die drahtlose Telegraphie mit elektromagnetischen Wellen durch die Unterwasserschalltelegraphie (U. T.), die militärisch manche Vorteile bieten würde, zu verdrängen. Waren doch schon mit den ersten einfachen Apparaten gelegentlich Reichweiten von 100 km und mehr erzielt worden. Wenn man diese Reichweiten nicht dauernd erhielt, so schob man die Schuld auf die Unvollkommenheit der Apparate, der Sender und Empfänger. Als Empfänger wurden nämlich Mikrophonempfänger verwandt, von denen bekannt ist, daß sie in der Empfindlichkeit stark schwanken. Selbst die besten in der Fernsprechtechnik verwandten Mikrophone schwanken um 200—300 Proz. und bei Spezialausführungen kann man durch sorgfältige Einstellung, die man einfach durch Probieren ermitteln muß, oft enorme Empfindlichkeiten erzielen, die das 10—100fache der normalen betragen. Die anfangs benutzten Mikrophone waren einstellbar und daher besonders schwankend.

Auch auf Unregelmäßigkeiten am Sender führte man die beobachteten starken Schwankungen in der Reichweite der U. T. zurück. Es wurden meist Sirenen verwandt, bei denen sich die rotierenden aufeinanderschleifenden Teile stark abnutzten. An „Verwehungen“ des Schalles, wie sie in der Luft vorkommen, hatte man beim Wasser nicht gedacht. Sie schienen hier unmöglich zu sein.

Der Beginn des Krieges, mit dem der eine von uns auch als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter bei der Torpedoinspektion eintrat, gab der U. T. eine erhöhte Bedeutung. Es schien da erforderlich, zunächst einmal die grundlegende Frage zu klären, welchen Einfluß das Wasser bei der Ausbreitung des Schalles habe. Denn hiervon hing ja die ganze Entwicklungsmöglichkeit der U. T. ab.

Bei jedem Ausbreitungsvorgang hat man zwischen zwei Arten der Energieabnahme zu unterscheiden:

1. Der durch die räumliche Ausbreitung, d. h. die Verteilung der Energie auf immer größer werdende Flächen. Bei Kugelwellen folgt hieraus eine quadratische Abnahme mit der Entfernung vom Sender. Bei dieser Ausbreitungsart bleibt die Energie an sich erhalten, im Gegensatz zu der

2. Abnahme der Energie durch Absorption, Zerstreuung oder dgl. In diesem Falle wird überall im Medium ein Teil

der Schallenergie in Energie anderer Form, beispielsweise Wärme umgewandelt, oder durch unregelmäßige Zerstreuung oder dgl. der weiteren Ausbreitung entzogen. Das wesentliche ist, daß wir dann pro Kilometer immer dieselbe Abnahme auf einen bestimmten Bruchteil haben, ganz gleichgültig, ob die Entfernung vom Sender groß oder klein ist. Die Abnahme erfolgt nach einer Exponentialfunktion.

Im allgemeinen wirken beide Faktoren zusammen. Dann überwiegt bei kleinen Entfernungen die quadratische Abnahme, bei großen Entfernungen die exponentielle. Solange das quadratische Gesetz noch gültig ist, läßt sich die Reichweite durch Verbesserung der Apparate noch wesentlich erhöhen. Eine Steigerung der Senderleistung oder der Empfängerempfindlichkeit auf das 100fache ergibt eine 10fache Reichweite, d. h. beispielsweise von 10 km auf 100 km. Sobald aber die exponentielle Abnahme überwiegt, ist praktisch durch eine Verbesserung der Apparate fast gar nichts mehr zu gewinnen. Nehmen wir z. B. eine Abnahme auf die Hälfte pro km an, so ergibt sich für n km eine Abnahme auf $(1/2)^n$, d. i. für $n = 10$ km auf $1/1000$. In diesem Falle würde also eine Steigerung der Senderenergie oder Empfängerempfindlichkeit auf das 1000fache nur eine Steigerung der Reichweite um 10 km, d. h. z. B. von 10 auf 20 km, bewirken. Eine nochmalige Steigerung der Senderleistung auf das 1000fache, d. h. also auf das 1000000fache der ursprünglichen, würde wieder nur 10 km weiter, also auf 30 km reichen. Man sieht, daß dann 100 km niemals zu erreichen sind.

Auf Grund dieser Überlegungen hielten wir eine genaue Untersuchung der Ausbreitung des Schalles im Wasser für erforderlich, und zwar kam es weniger auf die Bestimmung der maximalen Reichweite an, die ja bisher schon oft gemessen war, als auf die viel schwierigere Untersuchung, nach welchem Gesetze die Abnahme der Schallenergie auf dem ganzen Wege erfolge.

II. Apparate und Meßverfahren.

1. Sender.

Zur Ausführung der Versuche standen seinerzeit verschiedene Sender und Empfänger zur Verfügung. Wenn wir

uns zunächst mit den Sendern befassen, so traf es sich sehr glücklich, daß gerade zu der Zeit, in der mit den Versuchen begonnen wurde, zwei *elektrisch betriebene Schallsender*, der Fessenden Oszillator der Submarine Signal Co. in Boston und der Elektromagnetsender der Signal-Gesellschaft m. b. H. in Kiel, bekannt wurden. Beide Sender sind im wesentlichen große Telephone, nur nach anderen Gesichtspunkten konstruiert. Die Membran wird elektromagnetisch durch Wechselstrom in Schwingungen versetzt und gibt ihre Energie als Schall an das Wasser ab. Die Membran und das sie erregende mechanische System haben deutlich ausgesprochene Eigenschwingungen, kommen also nur bei Resonanz stark ins

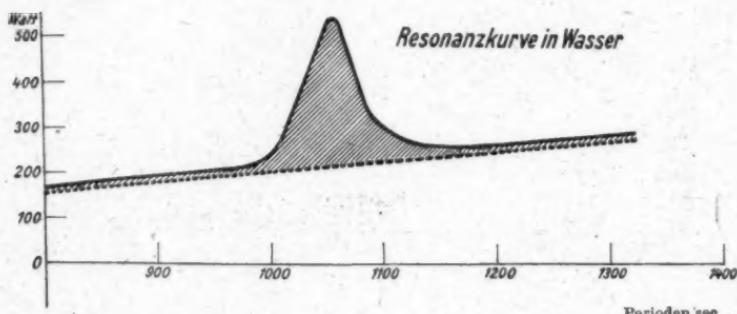


Fig. 1.

Schwingen. Es zeigte sich, daß die zugeführte elektrische Leistung, die an einem eingeschalteten Wattmeter unmittelbar abgelesen werden konnte, in gleicher Weise bei Resonanz stark anstieg, wie aus Fig. 1 zu ersehen ist. Da bei der Aufnahme dieser Kurve die Stromstärke absichtlich konstant gehalten wurde, sollte man ohne mechanische Schwingungen die punktierte Linie erwarten, da die Kupfer- und Eisenverluste mit der Frequenz langsam ansteigen. Die schraffierte gezeichnete Fläche, die eine normale Resonanzkurve bildet, überlagert sich diesen Verlusten. *Sie stellt die durch die mechanischen Schwingungen verursachten Verluste dar, die zum Teil durch innere Dämpfung verloren gehen, zum größten Teil aber akustisch ausgestrahlt werden.* Daß der erstere Teil

sehr klein war, ergab sich durch den Vergleich mit der Aufnahme der Resonanzkurve in Luft (Fig. 2), die wegen des Fehlens der Strahlungsdämpfung außerordentlich scharf war, also anzeigte, daß die innere Dämpfung sehr viel kleiner war. Für genaue Bestimmungen kann ihr prozentualer Anteil leicht in Rechnung gesetzt werden.¹⁾

Beide Apparate waren mit Gleichstrom polarisiert; die magnetische Anzugskraft war daher proportional dem Produkt aus der Gleichstrom- und der Wechselstromstärke. Dann mußte die ausgestrahlte Leistung quadratisch mit dem Produkt dieser beiden Stromstärken wachsen. Diese Folgerung fand sich auch experimentell weitgehend bestätigt. Verminderung allein der Wechselstromstärke auf $1/n$ verminderte den Aus-

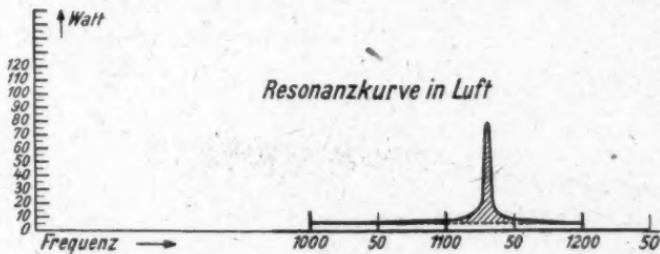


Fig. 2.

schlag am Wattmeter auf $1/n^2$, und zwar sowohl in der Resonanz wie außerhalb derselben. Man erhielt also wieder genau die Fig. 1, nur mit einem um $1/n^2$ verminderten Strommaßstab. Verminderung der Gleichstromstärke auf $1/n$ verminderte dagegen nur die Größe der schraffierten Fläche auf $1/n^2$, so daß die schwächer werdende mechanische Resonanzerscheinung gegenüber den konstanten elektrischen Verlusten bald gar nicht mehr hervortrat.

Das quadratische Gesetz fand sich weitgehend gut bestätigt. Nur bei großen Stromstärken trat schließlich Sättigung ein. Beim Fessenden Oszillatator änderte sich gelegentlich auch

1) Diese Fragen sind inzwischen von den Herren Hahnemann und Hecht genauer untersucht worden. Vgl. Phys. Zeitschr. 20, S. 104, 245. 1919.

die Resonanzlage mit der Stromstärke, wenn die Vorspannung seiner inneren Membranen ungünstig gewählt wurde. Die Elastizität der sich durchbiegenden Membran, die hier für die Resonanzlage maßgebend ist, ist nämlich vom Ausschlag abhängig. Daher treten auch gelegentlich sogenannte „Kipperscheinungen“ auf, ein plötzliches Umspringen des Schwingungszustandes bei einer gleichmäßigen Änderung der Frequenz, und zwar bei zu-

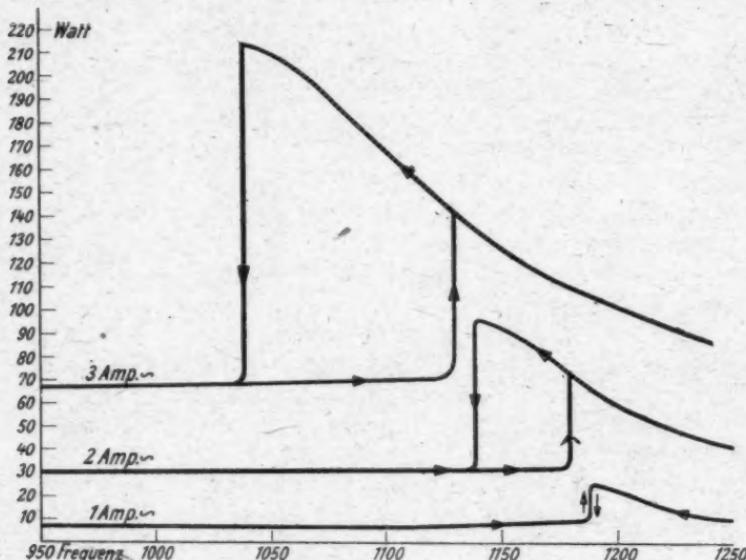


Fig. 3.

nehmender Frequenz an einer andern Stelle als bei abnehmender (Fig. 3). Die gleichen Erscheinungen sind bei elektrischen Schwingungskreisen mit Eisenkernspulen bekannt.¹⁾ Auch bei diesen ist die Selbstinduktion und damit die Resonanzlage von der Stromstärke abhängig. — Beim Sender der Signal-Gesellschaft wurde niemals eine Verschiebung bemerkt. Bei diesen werden als elastische Zwischenglieder longitudinal beanspruchte Stäbe benutzt, deren Elastizität bekanntlich bis an die Grenze

1) Vgl. Barkhausen, Labile Zustände elektrischer Systeme. Verh. d. D. Phys. Ges. XI, S. 287. 1909.

der Zerreißfähigkeit konstant ist. Daher ist der Sender der Signal-Gesellschaft zu Meßzwecken hervorragend geeignet.

Der mechanisch-akustische Schwingungsvorgang wurde auch rechnerisch untersucht¹⁾ und gute Übereinstimmung mit den Messungen gefunden. Besonders gab die folgende Erscheinung eine gute Bestätigung.

Bei Druckschwankungen von 1 Atm. berechnet sich die akustisch ausgestrahlte Leistung im Wasser zu 0,3 Watt/cm², so daß eine Membran von 1000 cm² „wirksamer Fläche“ 300 Watt ausstrahlt. Höhere negative Druckschwankungen sind aber, falls der Sender nicht tief untergetaucht wird, unmöglich, da sonst *Vakuumbildung* eintritt, das Wasser sich von der Membran loslässt. In der Tat beobachtete man eine starke, schaumartige Blasenbildung an der Sendermembran, wenn die am Wattmeter angezeigte Leistungsdifferenz 300 Watt überschritt. Gleichzeitig schwankte der Zeiger des Instrumentes unregelmäßig hin und her, während er sonst ruhig feststand. Tauchte man den Sender tiefer unter, trat das Schwanken erst bei einer höheren Leistung ein. So konnte also experimentell das Eintreten einer bestimmten Druckschwankung sicher festgestellt werden und da sich dafür die akustisch ausgestrahlte Leistung in gleicher Höhe errechnete wie die am Wattmeter angezeigte Differenz, ist ihre Identität sichergestellt.

Hieraus folgt übrigens weiter ein wichtiges Konstruktionsprinzip, nämlich daß die Membran eines Senders eine durch die Senderleistung und die Eintauchtiefe bestimmte Größe nicht unterschreiten darf, damit keine Blasenbildung eintritt.

Daß die in Fig. 1 schraffierte Leistungsdifferenz tatsächlich akustisch ausgestrahlt wurde, wurde schließlich noch geprüft an einem aperiodischen Telephon, das in der Nähe des Senders ins Wasser gehängt wurde und auf ein Duddelgalvanometer geschaltet war. Die Ausschläge an diesem Galvanometer sind proportional dem Quadrat der durchfließenden Stromstärke, in unserem Fall also dem Quadrat der Schwingungsweite der Telephonmembran, d. h. direkt proportional der das Telephon treffenden akustischen Leistung.

1) Vgl. hierzu Hahnemann und Hecht, Phys. Zeitschr. 17. S. 601. 1916 und 18. S. 261. 1917.

In der Tat erhielten wir bei Änderungen der Frequenz des den Sender speisenden Wechselstromes am Galvanometer eine Resonanzkurve von derselben Form wie die in Fig. 1 gezeichnete schraffierte Fläche. Auch blieb bei Änderung der Gleich- oder Wechselstromstärke am Sender der maximale Ausschlag am Duddelgalvanometer stets proportional der maximalen Erhöhung des Wattverbrauches am Sender; das Verhältnis beider ist konstant wie die folgende Tabelle zeigt.

Differenz im Wattverbrauch	Ausschlag am Galvanometer	Verhältnis beider
280	45°	6,2
95	18°	5,3
160	30°	5,3
45	9,5°	4,7

Das war ein weiterer Beweis dafür, daß die Differenz im Wattverbrauch tatsächlich als Schallenergie ausgestrahlt wurde.

Durch diese Messungen wurde wohl zum ersten Male, wie uns scheint, *in einwandfreier Weise die von einer Schallquelle akustisch ausgestrahlte Leistung festgestellt*. Dies war auch praktisch in zweierlei Hinsicht wichtig. Zunächst ergab sich hieraus der Wirkungsgrad der Sender in der Resonanzlage zu etwa 50% (vgl. Fig. 1). Eine wesentliche Erhöhung der Lautstärke war also nicht mehr durch Verbesserung der Apparate, sondern nur durch Steigerung der zugeführten Leistung möglich. Und zweitens konnte mit einem einmal geeichten Sender durch einfaches Regulieren der Stromstärken jede gewünschte Lautstärke quantitativ genau hergestellt werden, und zwar herab bis zu den kleinsten Lautstärken. Im allgemeinen wurde der Gleichstrom konstant gehalten und der Wechselstrom verändert. Dann ergab z. B. ein Sender 4 Watt ausgestrahlte Leistung pro 1 Amp.² Wechselstrom, also 100 Watt bei 5 Amp., $4/100$ Watt bei $1/10$ Amp., $4 \cdot 10^{-6}$ Watt bei 10^{-3} Amp. usw. Hiervon wurde bei der Empfängerprüfung und bei den Reichweitenversuchen weitgehendst Gebrauch gemacht.

Außer den elektrischen Sendern wurden gelegentlich auch mit Druckwasser betriebene, von der Signal-Gesellschaft hergestellte *Sirenen* benutzt. Bei diesen kann die ausgestrahlte

Schalleistung nicht gemessen und somit auch nicht auf ihre Konstanz geprüft werden. Sie kann nur unter der wohl kaum exakt bestehenden Voraussetzung berechnet werden, daß der pulsierend austretende Wasserstrom zerlegt werden kann in einen gleichförmigen akustisch unwirksamen und einen sinusförmigen, hin und zurückflutenden Anteil, dessen Amplitude A etwa gleich der mittleren, gleichförmigen Strömung zu setzen ist, da ja der Wasserstrom zeitweise ganz null wird. Die Rechnung sei hier nur kurz angedeutet.

Das Geschwindigkeitspotential eines von einer Schallquelle ausgehenden Zuges von harmonischen Wellen ist

$$\varphi = - \frac{A}{4\pi r} \cos \alpha (a t - r).$$

Daher ist der gesamte durch eine Kugel vom Radius r hin und her pulsierende Strom

$$4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A \cos \alpha a t,$$

wenn $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ ist. A ist der Maximalbetrag der an der Schallquelle zugeführten Strömung. Nach Raleigh¹⁾ beträgt nun in diesem Fall die von der Schallquelle in den Raum ausgestrahlte Leistung

$$W = \frac{\rho \alpha^2 a A^2}{8\pi} = 1,05 \frac{n^2}{10^5} A^2 \text{ erg/sec.}$$

Setzen wir A in lit/sec ein, so erhalten wir

$$W = 1,05 \left(\frac{n}{1000} \right)^2 A_{\text{lit/sec}}^2 \text{ Watt.}$$

Bei den benutzten Sirenen war A etwa 10 lit/sec, also die ausgestrahlte Leistung bei der Frequenz $n = 1000/\text{sec}$ etwa 100 Watt. Da der Betriebsdruck etwa 6 Atm. betrug, berechnet sich der Wirkungsgrad zu nur 2 Proz. Die Rechnung ist daher nur mit Vorsicht hinzunehmen, da durch andere mitschwingende Teile, z. B. das Zuleitungsrohr, auch noch Schall erzeugt werden kann.

1) Raleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen. II.
S. 128 ff. 1880.

Ein Vergleich der beiden zur Verfügung stehenden Sender-typen, der freilich wegen des sehr verschiedenen Toncharakters recht ungenau ist, ergab für beide die gleiche Größenordnung der ausgestrahlten Schalleistung (300 Watt).

2. Empfänger.

Als Empfänger wurden aus Gründen der Einfachheit und Bequemlichkeit in der Hauptsache *Mikronenempfänger* benutzt, in einer Ausführung, wie sie im wesentlichen auch auf Handelsschiffen zum Abhören von Unterwasserglockensignalen benutzt werden. Die Mikrophone sind in Bronzekapseln wasserdicht eingeschlossen (Fig. 4). Ein Teil der Kapselwand

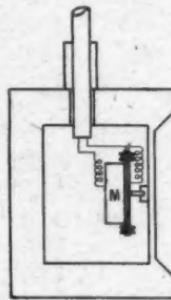


Fig. 4.

wird gebildet aus der die Schallwellen aufnehmenden Membran, mit der das eigentliche Mikrophon *M* akustisch leitend in Verbindung steht. Die Stromzuführung übernimmt ein wasser-dicht in die Kapsel eingezogenes Gummiaderkabel. Die Mikrophone konnte man vom Empfangsschiff aus am Kabel leicht beliebig tief ins Wasser hängen. Ihre Schaltung ist aus Fig. 5 zu ersehen. Der Gleichstrom *J* wurde zwei bis drei Trockenelementen *E* entnommen und durch einen Regulier-widerstand *R*, auf 50 Milliampere einreguliert. Die durch die Schallwellen entstehenden Stromschwankungen wurden durch den Transformator *T* dem Fernhörer *F* zugeführt. Die *Lautstärkemessung* geschah nach der Parallelohmmethode, indem der Widerstand *R* so lange verkleinert wurde, bis der Senderton gerade nicht mehr im Fernhörer wahrnehmbar war. Diese

Einstellung war auf etwa 20 Proz. genau, Nebengeräusche im Mikrofon oder am Meßort verursachten freilich oft wesentlich größere Fehler. Die „Lautstärke“ wurde berechnet nach der Formel

$$L = 1 + \frac{1000}{R},$$

indem der Kombinationswiderstand T parallel $F = \frac{T \cdot F}{T + F}$ für Wechselstrom etwa 1000 Ohm betrug.¹⁾ F war ein 1000-ohmiger Fernhörer mit einem Wechselstromwiderande

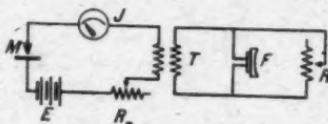


Fig. 5.

von etwa 3000 Ohm. Die so berechnete „Lautstärke“ ist zunächst nur ein Maß für die vom Mikrofon erzeugte Wechselstromstärke und es war zu prüfen, welche akustische das Mikrofon treffende „Wasserlautstärke“ dieser entsprach. Ein roher Versuch zeigte schon, daß hier sehr große Fehler unvermeidlich sind. Eine geringe Umlagerung der Mikrofonkontakte, wie sie oft bei den geringsten Erschütterungen schon eintrat, konnte die gemessene „Lautstärke“ um das zwei- bis dreifache ändern, obwohl die Wasserlautstärke genau konstant gehalten wurde. Es hat in diesem Falle gar keinen Zweck, eine möglichst genaue Einzelmessung zu machen. Dagegen erhält man einigermaßen brauchbare Resultate, aus denen sich auch Gesetzmäßigkeiten ableiten lassen, wenn man das Mittel aus sehr vielen Messungen, die unregelmäßig durcheinander liegen, nimmt. So wurde die Beziehung zwischen berechneter und Wasserlautstärke in folgender Weise geprüft. Sechs Empfänger wurden in 1—5 m Abstand vom Sender ins Wasser gehängt. Zum Empfangstelephon parallel lagen abwechselnd

1) Die übliche Rechnung, bei der nur die Stromversweigung zwischen R und F betrachtet wird, ist falsch. Bei kleinerem Widerstande T reguliert R z. B. praktisch erst von da ab, wo es kleiner als T wird.

durcheinander die Widerstände $R = 1, 10, 100, \infty$ Ohm, was also berechneten Lautstärken von 1000, 100, 10, 1 entspricht. Für jede Widerstandsstufe wurde mehrmals diejenige Senderstromstärke bestimmt, bei der man gerade noch auf dem Empfänger einen Ton hörte. Obwohl die so bestimmten Senderstromstärken unter denselben Bedingungen oft mehr als 1:3 voneinander abwichen, ließ sich doch deutlich erkennen, daß die Änderungen der Senderstromstärke durchweg geringer waren als die zugehörigen Lautstärken. Bei tiefen Perioden war die Senderstromstärke sehr nahe der Wurzel aus der nach obiger Formel berechneten Lautstärke proportional, d. h. eine Änderung von R im Verhältnis 1:100 trat schon bei einer Änderung der Stromstärke von 1:10 ein. Hiernach wäre die berechnete Lautstärke nicht ein Maß für die Amplituden, sondern für deren Quadrat, d. h. für die akustische Leistung im Wasser. Bei höheren Periodenzahlen war aber mehr das Umgekehrte der Fall.

Mit einem geeichten Sender, bei dem die ausgestrahlte Leistung pro Ampere bekannt war, konnte so auch eine *absolute Eichung* der Empfänger vorgenommen werden unter der Annahme, daß die Ausbreitung der Schallenergie in geringen Abständen vom Sender quadratisch vor sich geht, die Schalldichte sich also aus der Senderleistung dividiert durch die Oberfläche der Kugel mit dem Empfängerabstand als Radius berechnen läßt.¹⁾ Daß der Sender nach allen Seiten gleich stark wirkte, wurde durch Drehen des Senders nachgewiesen. Es ergab sich, daß eine Schalldichte von der Größenordnung 10^{-15} Watt/cm² am Ort des Mikrofons erforderlich war, um einen hörbaren Ton zu erzeugen. Das menschliche Ohr braucht etwa 10^{-18} Watt/cm². Das steht in guter Übereinstimmung mit der beobachteten Tatsache, daß der Schall unter Wasser in dem Luftraum z. B. eines Unterseebootes mit dem bloßen Ohr etwas schlechter empfangen

1) Streng genommen müssen hierbei Sender und Empfänger von allen reflektierenden Wänden, also von dem Grund und der Wasseroberfläche einen Abstand haben, der groß gegen ihren gegenseitigen Abstand ist. Dieser muß andererseits groß gegen die Senderabmessungen sein. Diese Bedingungen sind schwer zu erfüllen und waren es bei der Eichung auch nicht, so daß nur die Größenordnung richtig ist.

wird als mit der Unterwasserschallapparatur. Es geht ja nur etwa $1/1000$ des Schalles vom Wasser in die Luft über.

Wegen der großen Inkonstanz der Mikrophone wurden, wo es die Verhältnisse gestatteten und es auf sehr genaue Messungen ankam, besonders bei den ersten genauen Versuchsreihen neben dem Mikrofon auch die vorher erwähnten elektrischen *Sender als Empfänger* benutzt. Die Wirkungsweise der elektrischen Sender als Empfänger ist dieselbe, wie die eines angesprochenen Telefons. Infolge der Membranschwingungen und der dadurch bewirkten Änderung des magnetischen Flusses werden in der Magnetspule des Apparates elektromotorische Kräfte induziert, die in einem unmittelbar angeschalteten Telefon einen Ton erzeugen. Die Lautstärke wurde auch hier durch Schwächung des Stromes bis zum Verschwinden des Tones gemessen. Da Sender und zugehöriges Telefon zusammen nur 40 Ohm wirksamen Widerstand hatten, wurde die Schwächung nicht durch Parallelohm, sondern durch einen Vorschaltwiderstand hergestellt (Fig. 6).

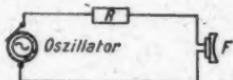


Fig. 6.

Die Lautstärke berechnet sich dann nach der Formel

$$L = 1 + \frac{R}{40}.$$

$R = 0$ ergibt die Lautstärke 1, d. h. die kleinste, eben noch hörbare Lautstärke. Bei sehr großen Lautstärken, nur wenige Meter vom Sender entfernt, konnte der akustisch induzierte Empfangstrom unmittelbar durch ein an Stelle des Fernhörers F eingeschaltetes Milliamperemeter gemessen werden. Diese sehr genaue Messung wurde nochmals zur Prüfung der Theorien benutzt. Wie zu erwarten, ergab sich Proportionalität dieses Stromes mit der Senderwechselstromstärke, sowie der Erregerstromstärke des Senders und der des Empfängers. Nur bei sehr großen Stromstärken traten Sättigungserscheinungen ein. Es ist zu beachten, daß neben dem Sender jetzt auch

der Empfänger eine ausgesprochene Resonanz besaß, und beide im allgemeinen nicht genau übereinstimmten. Das letztere war bis zum gewissen Grade eine Erleichterung. Wurde nämlich eine mittlere Frequenz eingestellt, so konnte diese in ziemlich weiten Grenzen geändert werden, ohne daß der Empfangstrom sich änderte.

Die Empfindlichkeit des Senders als Empfänger war etwa zehnmal geringer als die guter Mikrophone.¹⁾ Dafür war aber die sicher gewährleistete Konstanz der Messung ein sehr großer Vorteil. Freilich brachte die Verwendung der Sender als Empfänger erhebliche Schwierigkeiten mit sich. Wegen des großen Gewichtes — ein Sender wiegt 250 kg — war er nur am Kran ins Wasser zu lassen. Ferner erfordert er 6 Amp. Gleichstromerregung; diese Versuche konnten also nur gemacht werden von Schiffen aus, die elektrische Maschinen an Bord hatten.

3. Meßverfahren.

Zur Durchführung der oben genannten Versuche über die Schallausbreitung waren zwei Stationen erforderlich, eine Sende- und eine Empfangsstation, von denen die eine an Land, die andere auf einem Schiff oder beide auf Schiffen untergebracht waren. Eine Station war gewöhnlich fest, d. h. sie änderte ihren Standort nicht, während die zweite Station beweglich war. Die Abstandsbestimmungen zwischen beiden Stationen wurden gemacht entweder durch Peilungen von Bord aus nach Landmarken oder einfach durch Ablaufen eines Schiffes mit konstanter bekannter Geschwindigkeit von der Gegenstation und Zeitmessung. Wo es möglich war, wurden beide Methoden kombiniert und aus den nach beiden Methoden gefundenen Werten der Mittelwert genommen. Versetzung durch Wind und Strom wurde nach Möglichkeit berücksichtigt. Die Fehler in der Entfernungsbestimmung betrugen etwa 5—10 Proz.

Da ein großer Teil der Empfangsmessungen mit Mikrofonen gemacht werden mußte, wurden zur Verminderung der Fehler sämtliche Lautstärkemessungen unter Benutzung mehrerer Empfangsapparaturen von mehreren Beobachtern,

¹⁾ Zu den späteren genauen Messungen wurden zum Teil weniger empfindliche, aber dafür etwas konstantere Mikrophone benutzt.

mindestens zwei, gleichzeitig ausgeführt. Die von den verschiedenen Beobachtern auf verschiedenen Empfangsapparaturen gemessenen Werte wurden dann zu Mittelwerten vereinigt.

Um die Genauigkeit noch zu vergrößern, wurde für jeden Beobachtungsort, d.h. für jeden Abstand vom Sender, in dem die Lautstärke gemessen wurde, mit verschiedenen Stromstärken, die durch verschiedene Morsezeichen gekennzeichnet waren, gesendet und für jede Stromstärke die Lautstärke bestimmt. Aus allen so erhaltenen Werten wurden die Lautstärken pro Ampere-Senderstrom gebildet und aus diesen Werten wieder der Mittelwert gebildet. Die Stromstärken wurden dabei in den Grenzen 1:70, die ausgestrahlte Schallleistung also fast wie 1:5000 geändert. Diese Methode ist sehr zuverlässig. Prinzipielle Fehler der Parallelohmmethode fallen bei ihr fast ganz heraus; denn es werden bei ihr die Mikrophone in allen Entfernung, wenigstens zum Teil, mit derselben Lautstärke, insbesondere auch mit der geringsten wahrnehmbaren Lautstärke beansprucht. Dadurch wurde ferner gleichzeitig festgestellt, welche geringste Schallleistung für jede Entfernung erforderlich war.

Um sich ein Bild von der Genauigkeit der Methode machen zu können, seien in der folgenden Tabelle die an einem Punkt mit verschiedenen Mikrophonempfängern gemessenen Werte mitgeteilt.

Ampere	G-Empfänger			M-Empfänger		
	P_1	P_2	$L/\text{Amp.}$	P_1	P_2	$L/\text{Amp.}$
14	10	7	9	15	15	5
8	10	8	14	20	20	6
4	30	30	8	50	40	5,5
2	40	40	12,5	50	70	8,3
1	50	80	15	300	120	6,5
0,5	200	300	10	10000 (?)	—	2 (?)
Mittel = 11				Mittel = 6,5		

Die Senderstromstärke wurde von 14 bis 0,5 Amp. geändert. Unter P_1 und P_2 sind die mit zwei Empfängern von zwei Beobachtern aus mehreren Messungen ermittelten Parallelohmwerke und unter $L/\text{Amp.}$ die daraus ermittelten Lautstärken pro Amp. mitgeteilt. Die so ermittelten Werte weichen

trotz der Ungenauigkeit der Methode und der Schwierigkeit der Messung nicht zu sehr voneinander ab.

Zum Vergleich sei auch eine Meßreihe mitgeteilt, bei der ein Sender als Empfänger diente.

Amp.	R_1	R_2	$\frac{R_1 + R_2}{2 \text{ Amp.}}$
14	8540	7040	556
8	8540	4040	474
4	2040	3040	635
2	1540	2040	895
1	840	940	890
0,5	290	240	1060
0,2	140	—	700
Mittel = 750			

Die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Zahlen bedeuten die von verschiedenen Beobachtern gemessenen Widerstandswerte, bei denen Verschwinden der Lautstärke eintrat. In der letzten Reihe sind die Mittelwerte aus beiden Messungen dividiert durch die Amperezahl enthalten.

Die beiden mitgeteilten Tabellen ergeben, daß innerhalb der Versuchsfehler sowohl beim Empfang mit Mikrofonen¹⁾ wie mit Oszillatoren die Lautstärke proportional der Senderstromstärke zunimmt, daß also die Lautstärke dividiert durch die Senderstromstärke für eine bestimmte Entfernung als konstant angenommen werden kann, obwohl die Senderstromstärke wie 1 : 70 geändert wurde. Die teils erheblichen Abweichungen vom Mittelwerte fallen ganz unregelmäßig und zeigen keine Abhängigkeit von der Stromstärke. Sie sind durch die Unsicherheit der Hörmessung bedingt.

III. Ergebnis der Versuche.

1. Abnahmegergesetz.

Die ersten systematischen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Lautstärke von der Entfernung wurden in der beschriebenen Weise am 17. und 18. Mai 1915 in der Eckern-

1) Die oben mitgeteilte Abweichung der Mikrofone von der Proportionalität wurde hier zum Teil dadurch kompensiert, daß der Sender bei 14 und 8 Ampere schon etwas übersättigt war.

förder Bucht angestellt. Der Abstand wurde etwa von Kilometer zu Kilometer geändert.

In den folgenden Tabellen sei der Anschaulichkeit wegen eine vollständige Meßreihe mitgeteilt. Die Tabellen a bis h enthalten die an den einzelnen Punkten gemessenen Lautstärken. Die erste Spalte jeder Tabelle enthält die Stromstärke, mit der der Sender betrieben wurde, die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Werte bedeuten die von zwei Beobachtern mit einem Oszillator gemessenen Lautstärken. Aus je zwei zusammengehörigen Werten der von beiden Beobachtern gemessenen Lautstärken wurde der Mittelwert gebildet und durch die Amperezahl dividiert. Der so entstandene Wert ist in Spalte 4 enthalten. Die Spalten 5—7 und 8—10 geben entsprechende Messungen mit zwei Mikrophonempfängern wieder. Aus den für jeden einzelnen Punkt und für jeden Empfänger gefundenen Werten für die Lautstärke pro Ampere wurden die Mittelwerte gebildet.

18. Mai 1915 9—12 Uhr vormittags 2 Versuchsreihen.

R = Vorschaltwiderstand + 40 Ohm.

$$P = \text{Parallelwiderstand} \cdot L = \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

$$L_1 = 1 + \frac{1000}{P_1}, \quad L_2 = 1 + \frac{1000}{P_2}$$

a) Entfernung 0,93 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1 + R_2}{2 \text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	10040	—	717	3	—	24	3	—	24
8	5040	—	630	4	—	31	8	—	16
4	4040	—	1010	5	—	50	4	—	62
2	2040	—	1030	10	—	50	40	—	12
1	1040	—	1040	18	—	66	70	—	14
0,5	640	—	1280	500	—	6	K. E.	—	(2)
0,2	440	—	2200	200	—	80	„	—	(5)

Mittel = 1142

Mittel = 37

Mittel = 26

trotz der Ungenauigkeit der Methode und der Schwierigkeit der Messung nicht zu sehr voneinander ab.

Zum Vergleich sei auch eine Meßreihe mitgeteilt, bei der ein Sender als Empfänger diente.

Amp.	R_1	R_2	$\frac{R_1 + R_2}{2 \text{ Amp.}}$
14	8540	7040	556 { Sender
8	3540	4040	474 } gesättigt
4	2040	3040	635
2	1540	2040	895
1	840	940	890
0,5	290	240	1060
0,2	140	—	700
Mittel = 759			

Die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Zahlen bedeuten die von verschiedenen Beobachtern gemessenen Widerstandswerte, bei denen Verschwinden der Lautstärke eintrat. In der letzten Reihe sind die Mittelwerte aus beiden Messungen dividiert durch die Amperezahl enthalten.

Die beiden mitgeteilten Tabellen ergeben, daß innerhalb der Versuchsfehler sowohl beim Empfang mit Mikrofonen¹⁾ wie mit Oszillator die Lautstärke proportional der Senderstromstärke zunimmt, daß also die Lautstärke dividiert durch die Senderstromstärke für eine bestimmte Entfernung als konstant angenommen werden kann, obwohl die Senderstromstärke wie 1 : 70 geändert wurde. Die teils erheblichen Abweichungen vom Mittelwerte fallen ganz unregelmäßig und zeigen keine Abhängigkeit von der Stromstärke. Sie sind durch die Unsicherheit der Hörmessung bedingt.

III. Ergebnis der Versuche.

1. Abnahmegerät.

Die ersten systematischen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Lautstärke von der Entfernung wurden in der beschriebenen Weise am 17. und 18. Mai 1915 in der Eckern-

1) Die oben mitgeteilte Abweichung der Mikrophone von der Proportionalität wurde hier zum Teil dadurch kompensiert, daß der Sender bei 14 und 8 Ampere schon etwas übersättigt war.

förder Bucht angestellt. Der Abstand wurde etwa von Kilometer zu Kilometer geändert.

In den folgenden Tabellen sei der Anschaulichkeit wegen eine vollständige Meßreihe mitgeteilt. Die Tabellen a bis h enthalten die an den einzelnen Punkten gemessenen Lautstärken. Die erste Spalte jeder Tabelle enthält die Stromstärke, mit der der Sender betrieben wurde, die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Werte bedeuten die von zwei Beobachtern mit einem Oszillatorm gemessenen Lautstärken. Aus je zwei zusammengehörigen Werten der von beiden Beobachtern gemessenen Lautstärken wurde der Mittelwert gebildet und durch die Amperezahl dividiert. Der so entstandene Wert ist in Spalte 4 enthalten. Die Spalten 5—7 und 8—10 geben entsprechende Messungen mit zwei Mikrophonempfängern wieder. Aus den für jeden einzelnen Punkt und für jeden Empfänger gefundenen Werten für die Lautstärke pro Ampere wurden die Mittelwerte gebildet.

18. Mai 1915 9—12 Uhr vormittags 2 Versuchsreihen.

R = Vorschaltwiderstand + 40 Ohm.

$$P = \text{Parallelwiderstand} \cdot L = \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

$$L_1 = 1 + \frac{1000}{P_1}, \quad L_2 = 1 + \frac{1000}{P_2}$$

a) Entfernung 0,93 km.

Amp.	Oszillatorm			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1 + R_2}{2}$ Amp.	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	10040	—	717	8	—	24	3	—	24
8	5040	—	630	4	—	31	8	—	16
4	4040	—	1010	5	—	50	4	—	62
2	2040	—	1030	10	—	50	40	—	12
1	1040	—	1040	16	—	66	70	—	14
0,5	640	—	1280	500	—	6	K. E.	—	(2)
0,2	440	—	2200	200	—	30	„	—	(5)
Mittel = 1142			Mittel = 37			Mittel = 26			

b) Entfernung 2,16 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2 \text{ Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	8540	7040	556	10	7	9	15	15	5
8	8540	4040	474	10	8	14	20	20	6
4	2040	3040	635	80	80	8	50	40	5,5
2	1540	2040	895	40	40	12,5	50	70	8,8
1	840	940	890	50	80	15	300	120	6,5
0,5	290	240	1060	200	300	10	10000	—	2 (?)
0,2	140	—	700				(?)		

Mittel = 759

Mittel = 11

Mittel = 6,5

c) Entfernung 3,24 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2 \text{ Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	8540	5040	307	20	20	4	40	30	2,1
8	2040	2040	255	40	30	9,7	40	30	3,7
4	940	1040	247	60 (?)	— (?)	4	50	50	5,2
2	540	790	333	40	60	10	300	80	4,2
1	290	440	365	1000	100	6,5	—	1000	2
0,5	—	240	480	—	1000	4	—	—	—
0,2	—	(?)	—	—	10000	5,5	—	—	—

Mittel = 331

Mittel = 5,4

Mittel = 3,4

d) Entfernung 4,07 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2 \text{ Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	2040	2540	163	20	15	4,1	20	20	4
8	1040	1040	130	30	30	4	40	30	3,7
4	440	—	110	30	80	5,5	40	90	5
2	540	—	270	100	90	5,7	200	150	3,4
1	240	—	240	1000	—	2	—	—	—
0,5	40	—	88	—					
0,2	—	—	—						

Mittel = 165

Mittel = 4,2

Mittel = 4,02

e) Entfernung 4,99 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2 \text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	1040	1040	74	20	20	3,6	80	40	2
8	640	440	67,5	50	60	2,3	100	80	1,5
4	190	240	17,5	200	200	1,5	200	300	1,2
2	40	40	20	300	500	1,8	250	600	1,9
1	140	—	140	1000	—	2	—	—	—
0,5	—	—	—	10000	—	2	—	—	7 (?)

Mittel = 63,8

Mittel = 2,2

Mittel = 1,6

f) Entfernung 6,18 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2 \text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	240	240	17	100	100	0,8	200	200	0,5
8	40	40	5	—	200	0,75	10000	300	0,3
4	—	—	—	1000	300	0,8	1000	300	0,8
2	—	—	—	1000	1	10000	300	1,8	—

Mittel = 11

Mittel = 0,8

Mittel = 0,7

g) Entfernung 7,12 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2 \text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	40	80	4	150	150	0,5	300	200	0,8
8	40	—	5	300	400	0,49	300	500	0,46
4	—	—	—	500 (?)	600	0,7	500	500	0,75

Mittel = 4,5

Mittel = 0,5

Mittel = 0,5

h) Entfernung 7,96 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2 \text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	—	—	—	500	—	0,2	500	—	0,2
8	—	—	—	500	10000	0,25	500	10000	0,25
4	—	—	—	10000	—	0,27	—	—	—

Mittel = 0,25

Mittel = 0,23

33*

i) Zusammenstellung der Lautstärken pro 1 Amp.

Für den Oszillator ist $L/\text{Amp.} = \frac{1}{40} \frac{R_1 + R_2}{2 \text{ Amp.}}$ gesetzt.

km	Oszillator	G-Empfänger	M-Empfänger	$\frac{G\text{E} + M\text{E}}{2}$
0,93	28,5	37	26	31
2,16	19	11	6,5	9
3,24	8,2	5,4	2,4	4,4
4,07	4,1	4,2	4,0	4,1
4,99	1,6	2,2	1,6	1,9
6,18	0,28	0,8	0,7	0,8
7,12	0,11	0,5	0,5	0,5
7,96	—	0,25	0,23	0,24

Die auf diese Weise für die einzelnen Punkte gefundenen Werte sind in Tab. i zusammengestellt. Die für den Oszillator gefundenen Werte sind durch 40 zu dividieren, um „Lautstärke“ zu erhalten. In Spalte 5 der Tab. i sind die für den *G*-Empfänger und den *M*-Empfänger gefundenen Werte noch einmal zu Mittelwerten vereinigt.

Die hier mitgeteilte Tab. i und eine zweite, hier nicht mitgeteilte Versuchsreihe bilden die Grundlage für die Fig. 7. In dieser Figur ist die Abhängigkeit der Lautstärke von der Entfernung graphisch dargestellt. Als Abszissen sind die Entfernungen in gewöhnlichem, linearem Maßstabe, als Ordinaten die Lautstärken in logarithmischem Maßstabe dargestellt. Die an zwei verschiedenen Tagen von zwei verschiedenen Beobachtern gemessenen Werte lassen als Mittel überraschend genau einen geradlinigen Verlauf der Kurven in der Figur erkennen. Ein geradliniger Verlauf bei logarithmischem Maßstabe bedeutet aber, daß die Lautstärke auf jeden Kilometer um einen gewissen Bruchteil geschwächt wird und zwar immer um denselben Bruchteil, ganz gleich, ob man etwa von 1 auf 2 km oder von 6 auf 7 km geht. Durch diese Messungen war der sichere Beweis erbracht, daß von quadratischer Abnahme keine Rede sein kann, die Abnahme vielmehr ein Absorptionsgesetz befolgt, und zwar ergab sich bei diesem Versuch die sehr starke Absorption von 2,3:1 pro Kilometer. Beim Fort-

schreiten um je 3 km sinkt die Lautstärke also auf 1:2,3³, d. h. auf rund den zehnten Teil. In Übereinstimmung mit diesem Ergebnis wurde beobachtet, daß zur Überbrückung von

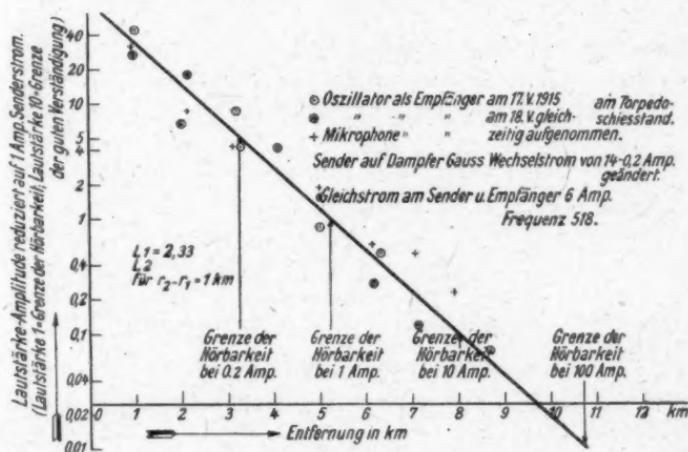


Fig 7.

8 km 10 Ampere am Sender erforderlich waren, zur Überbrückung von 5 km nur noch 1 Ampere und für 3 km $1/5$ Ampere Senderstrom ausreichte. Die aufgewandte Leistung wächst quadratisch mit der Stromstärke und es waren für 8 km ein Kilowatt, für 5 km 10 Watt, für 3 km 0,4 Watt, d. h. $1/2500$ der Leistung für 8 km erforderlich. Für 11 km wären hier nach 100 Kilowatt, für 14 km 10000 Kilowatt erforderlich gewesen. *Es war also als praktisch vollkommen unmöglich nachgewiesen, selbst bei wesentlicher Verbesserung der Apparate eine irgendwie größere Reichweite zu erzielen.*

2. Einfluß der Wassertiefe.

Nach diesen ersten Versuchen herrschte zunächst große Ratlosigkeit. So geringe Reichweiten waren bis dahin noch nie beobachtet worden. Man konnte sich den Grund dieser starken Abnahme überhaupt nicht erklären und vermutete, daß die Wassertiefe oder die Beschaffenheit des Bodens vielleicht

die Schuld sein könnten. Es wurde deshalb eine Wiederholung der Versuche unter den verschiedensten Bedingungen vorgenommen.

Wir wollen zunächst die Ergebnisse einiger Versuche mitteilen, die im Juni 1915 bei verschiedenen Wassertiefen in der Danziger Bucht angestellt wurden. Da das Abnahmegeretzbereits bekannt war, wurden nur Stichproben auf 4 und 8 Seemeilen und in möglichst weiter Entfernung gemacht. Sie

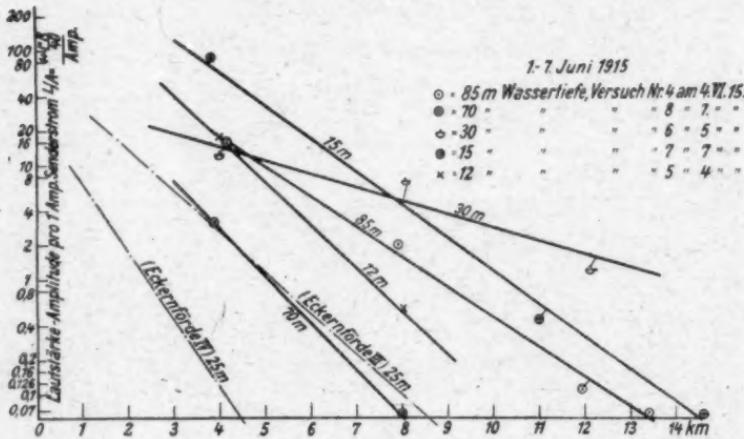


Fig. 8.

wurden ausgeführt bei 12, 15, 30, 70 und 85 m Wassertiefe (Fig. 8). Die Messungen sind nicht sehr genau, lassen aber doch den Schluß zu, daß die verschiedene Wassertiefe sicher nicht die Ursache für die starke Dämpfung, die auch hier auftrat, sein konnte.

Es war schon bei den Eckernförder Versuchen beobachtet worden, daß sich die Lautstärke innerhalb einiger Minuten langsam änderte, auch wenn der Oszillator als Empfänger benutzt wurde, die Apparate also nicht die Ursache dafür sein konnten. Das trat hier in noch höherem Maße ein. Es kamen Lautstärkenunterschiede von 1:5 vor. Bei tiefem Wasser hörte man ferner oft ein langes Nachhallen wie in einer Kirche. Morsezeichen kamen dann sehr verschwommen an und waren

schwer oder gar nicht zu entziffern. Es herrschte an diesen Tagen Sonnenschein und meist glatte See. Temperaturmessungen mit einem elektrischen Thermometer ergaben in größeren Tiefen um 6 bis 8° kälteres Wasser als an der Oberfläche. Vgl. hierzu den folgenden Abschnitt.

Während also bei Wassertiefen zwischen 10 und 100 m keine Unterschiede zwischen den verschiedenen Tiefen hinsichtlich der Dämpfung des Schalles festgestellt wurde, liegen die Verhältnisse anders, wenn der Schall größere Strecken flachen Wassers durchläuft.

Der obere Teil der Fig. 9 zeigt die äußeren Bedingungen des in Landnähe ausgeführten Versuches. Der Sender stand in 3 km Abstand von der Landungsbrücke. Gegeben wurde mit 517 Perioden und zwei verschiedenen Stromstärken. 3 Mikrophone wurden von einem Ruderboot aus ins Wasser gehängt. Die Lautstärke wurde wie früher angegeben gemessen, die Tiefe wurde durch Lotung festgestellt, die Entfernung an der Landungsbrücke durch Abschreiten, die Entfernungen zwischen der Landungsbrücke und der ausgelegten Markierungsboje durch Abrudern mit konstanter Geschwindigkeit nach der Zeit bestimmt. Die Zwischenwerte wurden geschätzt. Daher sind die Entfernungen nicht sehr genau, nur der Größenordnung nach richtig.

Die untere Kurve der Fig. 9 zeigt die von See her anfangs langsam, später schnell abnehmende Lautstärke.

Der Schall wird also beim Durchlaufen größerer Längen flachen Wassers sehr stark geschwächt. Bei 517 Perioden, d. h. rund 3 m Wellenlänge, geht die Schalllautstärke bei einer Wassertiefe von 3 m, d. h. von einer Wellenlänge, beim Durchlaufen von 100 m auf den vierten Teil, bei 2 m Wassertiefe auf den sechzehnten Teil zurück. Bei 4 bis 5 m Wassertiefe ist die Schwächung wesentlich geringer, schätzungsweise $\frac{1}{2}$ für 100 m.

Auf 1 km Länge würde die Schwächung von 100 m Länge 10 mal nacheinander eintreten. Bei 2 m Wassertiefe würde dann die Lautstärke auf $(\frac{1}{10})^{10}$, bei 3 m Wassertiefe auf $(\frac{1}{4})^{10}$, bei 4 m Wassertiefe auf $(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1000}$ geschwächt werden. Hier nach ist mit einiger Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß bei

einer Wassertiefe von über 9 m, d. h. von über 3 Wellenlängen, der Einfluß auf die Schwächung des Schalles zu vernachlässigen ist. In der Tat zeigen die vorher mitgeteilten Reichweiten-

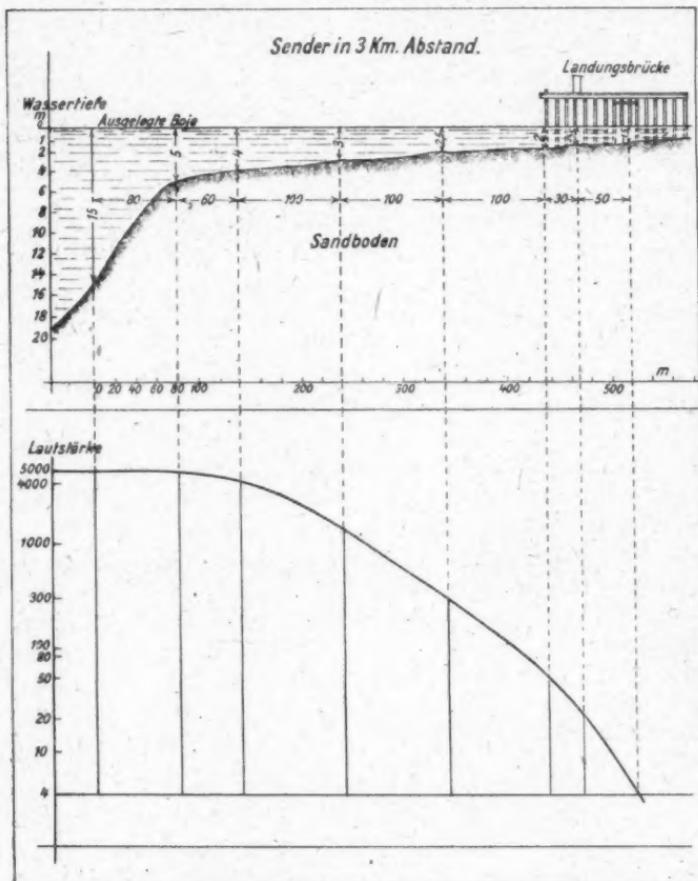


Fig. 9.

versuche, daß zwischen 12 und 80 m Wassertiefe kein merklicher Unterschied in der Dämpfung des Schalles eintritt. Spätere Versuche ergaben meist eine Schwächung, wenn der Schall über Sandbänke laufen mußte, die weniger als 6 m Wasser hatten.

Die Tatsache, daß bei geringer Wassertiefe eine sehr starke Dämpfung eintritt, ist wohl dadurch zu erklären, daß Sandboden den Schall sehr stark dämpft und nicht durchläßt. Das wurde auch experimentell bewiesen, indem Mikrophone am Strand eingegraben wurden. Schläge gegen einen im Boden gesteckten Metallstab waren in unmittelbarer Nähe sehr laut zu hören, aber schon in einer Entfernung von wenigen Metern nicht mehr. Würde sich der Schall auch im Sandboden fortpflanzen, so müßte auch in der Nähe des Bodens im Wasser eine größere Lautstärke herrschen. Das Gegenteil ist aber der Fall, die Lautstärke ist unmittelbar am Boden geringer.

Nach verschiedenen Versuchen ist die Lautstärke unabhängig von der Tiefe, in der sich Sender oder Empfänger befinden, so lange sie nicht unmittelbar auf dem Meeresboden liegen oder von der Wasseroberfläche weniger als eine Wellenlänge entfernt sind. Wenn sich Sender oder Empfänger der Oberfläche mehr als eine Wellenlänge (bei 500 Perioden gleich 3 m) nähern, so nimmt die Lautstärke merklich ab. Direkt an der Oberfläche ist die Lautstärke Null. Bei $\frac{1}{3}$ Wellenlänge sinkt sie auf $\frac{1}{4}$ des Wertes, den sie bei 3 oder 10 m hat. Das ist theoretisch auch etwa zu erwarten, da die Mikrophone auf Druckschwankungen ansprechen, die ja in der Oberfläche Null sind. Versucht man freilich die ganze Schallausbreitung im Wasser rechnerisch darzustellen, so findet man, wenn man die Oberfläche als akustisch weich betrachtet, d. h. die Grenzbedingung Schalldruck = 0 einführt, daß in größerer Entfernung vom Sender überhaupt keine Lautstärke mehr vorhanden sein sollte.

3. Die Ursache für die Dämpfung.

Durch diese und zahlreiche spätere Versuche wurde einwandfrei festgestellt, daß lediglich der Zustand des Wassers selbst die alle Hoffnungen zerstörende starke Dämpfung des Schalles bedingen müsse. Es gelang jetzt noch, dies theoretisch zu begründen.¹⁾ Es sind die Ungleichförmigkeiten von

1) H. Lichte, Physik. Zeitschr. 11. S. 385. 1919.

Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, daß eine Dämpfung infolge innerer Reibung des Wassers nicht in Frage kommt. Rayleigh, Theorie

Temperatur und Salzgehalt, die die Schallgeschwindigkeit im Wasser fast ebenso stark beeinflussen, wie Temperatur und Wind in der Luft. Es tritt daher *erstens* bei horizontalen Schichtungen eine Krümmung der Schallstrahlen verbunden mit einer Abwanderung der Energie nach oben oder unten ein. Diese ist in Luft bekanntlich die Ursache dafür, daß man mit dem Winde viel weiter hört, als gegen den Wind. (Der Wind ist oben stets stärker als am Boden.) Im Wasser folgt daraus, daß im Sommer, wenn das Wasser oben wärmer ist als unten, die Schallenergie nach unten abwandert, im Winter entsprechend nach oben. Da nun der Boden den Schall nur wenig, die Oberfläche dagegen praktisch vollkommen reflektiert, so muß die Reichweite im Sommer kleiner sein als im Winter. Diese Folgerung fand sich durch die zahlreichen während der folgenden Jahre angestellten Versuche durchaus bestätigt.

Zweitens wird aber jede vertikale Wand verschiedener Beschaffenheit eine Reflexion oder bei unregelmäßiger Form eine Zerstreuung des Schalles bewirken. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie beim Nebel. Die Wassertropfen sind an sich durchsichtig, aber die diffuse Zerstreuung läßt das Licht nicht durch. Wenn beim Schall auch die Inhomogenitäten wesentlich geringer sind, so muß doch eine ununterbrochene Folge solcher Unregelmäßigkeiten insgesamt eine starke Wirkung ausüben, besonders beim Wasser, wo ein Teil der zerstreuten Energie durch den nahen Boden verschluckt wird. Daß in Luft sehr starke Inhomogenitäten, wie z. B. heiße Flammenwände, den

des Schalles II. S. 368 ff., berechnet den Dämpfungskoeffizienten bei Vorhandensein von innerer Reibung

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \mu}{3\varrho a^5} n^2,$$

wenn μ der Reibungskoeffizient, ϱ die Dichte, a die Schallgeschwindigkeit und n die Frequenz bedeuten.

Für Wasser ist

$$\varrho = 1, \quad a = 1,44 \cdot 10^5, \quad \mu = 0,01;$$

daraus berechnet sich

$$\alpha = n^2 \cdot 10^{-16},$$

und wenn wir $n = 1000$ annehmen

$$\alpha = 10^{-10};$$

d. h. es tritt eine Abnahme der Amplitude auf $1/e$, also eine Intensitätsverminderung auf fast $1/10$, erst nach 100000 km auf.

Schall nicht durchlassen, hat Tyndall gezeigt.¹⁾ Ebenso ist das wirbelige Schraubenwasser großer Schiffe für den Unterwasserschall fast undurchlässig.

Eine Zeitlang wurden auch bei den Reichweiteversuchen Temperatur und Salzgehalt des Wassers mit elektrischen Apparaten in verschiedenen Tiefen gemessen. Fig. 10 zeigt z. B. die Abnahme der Temperatur mit der Wassertiefe im Sommer an drei verschiedenen Punkten. Die daraus rechnerisch zu folgernde Dämpfung ist noch größer als die gemessene, auch wenn man berücksichtigt, daß der nach unten hin zunehmende Salzgehalt den Temperatureinfluß zum Teil kompensiert.

Hieraus erklären sich auch die außerordentlich verschiedenen Reichweiten, die bald nur wenige Kilometer, bald über 100 km betrugen. Bei einer fest verlegten Sender- und Empfangsanlage war im Sommer mit der größten Senderleistung von 300 Watt oft ein Empfang auf den 8 und sogar nur 6 km entfernten Empfängern nicht möglich, während im Winter gelegentlich eine ausgestrahlte Schalleistung von nur 0,01 Watt noch auf 15 km, dem weitesten Empfänger deutlich gehört wurde. Bei rein quadratischer Abnahme der Energie berechnet sich in diesem Falle die Schalldichte am Empfangsort zu $0,4 \cdot 10^{-15}$ Watt/cm². Da dieser Schalldichte tatsächlich etwa die Grenzlautstärke der Mikrophone entspricht, wie im II. Abschnitt angegeben, muß hier die Dämpfung ganz verschwindend gewesen sein, wenn nicht durch die obere und

Reichweitenversuch VIII. 12.8.15.
Versuch Nr. 3 Mittelgrund.

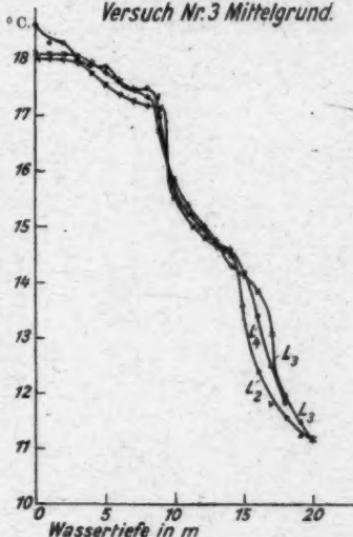


Fig. 10.

1) J. Tyndall, On Sound. 4. Aufl. 1883.

untere enge Begrenzung des Wassers ein anderes Ausbreitungsge-
gesetz als das quadratische bestanden hat (Sprachrohrwirkung).

Bei quadratischer Ausbreitung würde ein 1-Kilowatt-Sender noch in 1000 km Abstand eine Schalldichte von 10^{-14} Watt/cm² erzeugen. Ohne Dämpfung könnte man also Reichweiten von weit über 1000 km erwarten! Normalerweise herrscht aber ein so starker „Nebel“, daß die Reichweite kaum 10 bis 20 km beträgt.

Wenn, wie bei den anfangs aufgestellten Versuchen, die Dämpfung des Wassers quantitativ festgestellt wird, so kann man diese mit in Rechnung setzen und bei bekannter Senderleistung die Schalldichte für jede Entfernung ausrechnen. Tut man dies für die größte Reichweite, bei der mit Mikrofonen noch Zeichen hörbar waren, so erhält man immer eine Schalldichte von der Größenordnung 10^{-15} Watt/cm² in guter Übereinstimmung mit der im II. Abschnitt mitgeteilten absoluten Eichung der Empfänger.

4. Örtliche Einflüsse.

Wenn die Verteilung von Temperatur und Salzgehalt einen so starken Einfluß hat, wird es auch verständlich, daß die Reichweiten in nahe beieinander liegenden Gegenden stark schwanken können. Mit genau denselben Apparaten und genau denselben Anordnungen war z. B. bei einem Versuch, der sich in nordöstlicher Richtung von Boje Mittelgrund A (westliche Ostsee) erstreckte (am 23. Juli 1915) schon auf 2 km kein Empfang mehr möglich, während bei einem Versuch, der am nächsten Tage von Boje Kiel-Leuchtfeuer in nördlicher Richtung sich erstreckte, auf 15 km noch gut empfangen wurde und auf 9 km noch eine sehr große Lautstärke herrschte. Bei dem zweiten Versuch nahm die Lautstärke bis 9 km etwa proportional der Entfernung ab, d. h. so, als ob überhaupt keine dämpfende Wirkung vorhanden sei. Von 9 km ab setzte aber eine nicht unerhebliche Dämpfung ein, so daß bei 15 km schon wesentlich schwächerer und bei 20 km gar kein Empfang mehr war. Im allgemeinen wurden frei von Küsten und Sandbänken größere Reichweiten erzielt, als in engen Buchten. Der Grund dafür ist sicher in der gleichmäßigeren Temperatur oder wenigstens in der gleichmäßigeren Schichtung der Temperatur im freien Wasser zu suchen. In Küstengegenden stauen sich

gerade die Strömungen und werden besonders stark. Insbesondere tritt hier Wirbelbildung ein, während im freien Wasser mehr Potentialströmung herrscht. Der Schall wird daher diffus zerstreut und vom Boden absorbiert. Gelegentlich wurde freilich auch beobachtet, daß in Landnähe die Reichweiten größer waren als in größeren Abständen von Land. Besonders ungünstig müssen hiernach die Flußmündungen sein, zumal hier auch noch der verschiedene Salzgehalt hinzukommt.

5. Einfluß der Frequenz.

Ungleichförmigkeiten im Wasser müssen vom Schall um so leichter überwunden werden, je größer die Wellenlänge, je tiefer also die Frequenz ist. Umgekehrt muß der ungünstige Einfluß zu geringer Wassertiefe gerade bei den langen Wellen zuerst hervortreten. Es war daher auf alle Fälle wichtig, den Einfluß der Frequenz auf die Ausbreitung zu untersuchen, zumal eine andere Frequenz die einzige Möglichkeit bot, die Dämpfung des Wassers und damit die Reichweite zu ändern. Es schien zunächst einmal wichtig, mit leicht zu beschaffenden Mitteln zu untersuchen, ob irgendein Gang der Reichweite mit der Frequenz bestehe. Es stand hierzu ein elektromagnetischer Sender für 1000 Perioden und ein solcher für 230 Perioden und ferner eine Sirene zur Verfügung. Letztere wurde durch einen besonderen Elektromotor in Umdrehungen versetzt, so daß man durch Ändern der Tourenzahl Tonhöhen von 1500 bis 2500 Schwingungen pro Sekunde einstellen konnte. Außerdem konnte auf der Empfangsseite durch Einschalten eines elektrischen Schwingungskreises vor das Telephon auf die Grund- und Obertöne der Sirene abgestimmt werden, so daß die Abnahme der Lautstärke für beide gleichzeitig gemessen werden konnte. Die Mikrophonempfänger waren für die tiefen und die hohen Frequenzen wesentlich weniger empfindlich. Doch war dies nicht von Bedeutung, da ja das Abnahmegesetz, nicht die Reichweite festgestellt werden sollte. Die elektromagnetischen Sender wurden wieder mit verschiedenen Stromstärken betrieben. Bei der Sirene war eine quantitativ meßbare Abschwächung nicht möglich, so daß sie nur mit voller Lautstärke benutzt wurde. Der Druck des Betriebswassers wurde genau konstant gehalten.

Für eine Versuchsreihe sind die Werte in Fig. 11 zusammengestellt. Abszissen und Ordinaten sind gewählt wie bei den früheren Kurven. Die Neigung der Linien, die die Größe der Dämpfung darstellen, sind bei allen Kurven im wesentlichen dieselben, zeigen insbesondere keinen Gang mit der Frequenz.

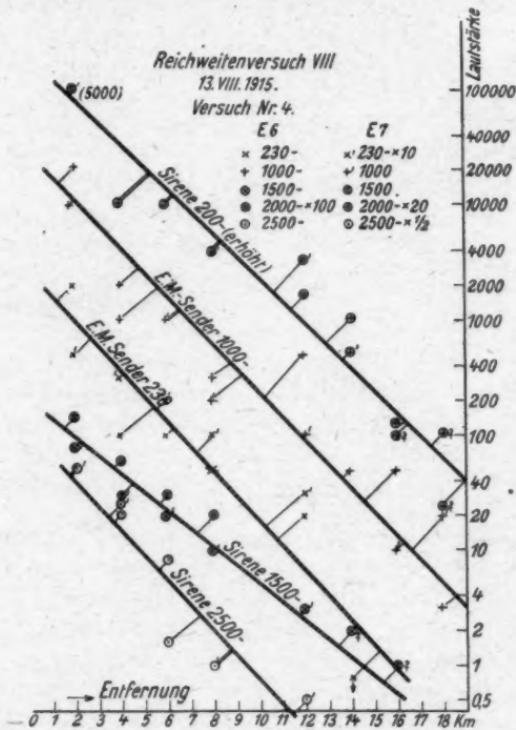


Fig. 11.

Die mittlere Frequenz 1500 erscheint (zufällig) am wenigsten gedämpft. Ein wesentlicher Vorteil der höheren Frequenzen bestand dagegen für die praktische Anwendung darin, daß sie durch Störungen aller Art wesentlich besser hindurchgehört werden.

Es wurden später auch Versuche mit ganz tiefen, direkt kaum hörbaren Frequenzen (50 Perioden pro Sekunde) gemacht.

Aus theoretischen Überlegungen sollte man für diese eine geringere Dämpfung erwarten. Auch pflanzen sich ganz langsame Schwingungen ja durch den Erdboden sehr weit fort, wie man an den Erdbebenwellen und den Aufzeichnungen von Maschinenerschütterungen durch die Seismographen erkennen kann. — Die praktischen Schwierigkeiten erwiesen sich aber als recht groß. Die eigens hierfür gebauten elektromagnetischen Sender strahlten nur geringe Leistung, etwa 10 Watt, aus. Die Mikrophonempfänger sind für diese tiefen Perioden sehr unempfindlich. Es wurde daher ein zweiter Sender als elektromagnetischer Empfänger benutzt. Der Ton selbst wurde durch besondere Mittel, die hier nicht näher angegeben werden können, hörbar gemacht. Neben den Tönen hatte man enorme Störungen durch den geringsten Seegang oder irgendeine Bewegung im Schiff, daher erzielte man nur Reichweiten von etwa 1 km. Innerhalb der Fehlergrenze war die Abnahme quadratisch, damit ist aber nicht gesagt, daß keine Dämpfung vorhanden ist, denn eine nicht übermäßig große Dämpfung tritt erst bei größerer Entfernung merklich in Erscheinung. Wegen der praktischen Schwierigkeiten konnten die Versuche nicht zu Ende geführt werden.

Zusammenfassung.

1. Die von einem elektromagnetischen Sender tatsächlich akustisch ausgestrahlte Leistung wurde bis auf etwa 10 Proz. genau bestimmt.
2. Die Grenzlautstärke von Unterwassermikrofonen entspricht etwa einer Schalldichte von 10^{-15} Watt/cm².
3. Die Ausbreitung des Schalles auf große Entfernung erfolgt (wie in der Luft) nicht nach dem Gesetz des Quadrates der Entfernung, sondern nach einem Dämpfungsgesetz, d. h. die Lautstärke sinkt immer auf einen bestimmten Bruchteil, wenn man um eine bestimmte Strecke weitergeht.
4. Die Ursache hierfür sind (wie in der Luft) akustische Ungleichförmigkeiten, insbesondere eine unregelmäßige Temperaturverteilung.
5. Die Folgerung hieraus, daß die Reichweite des Unterwasserschalls im Sommer im allgemeinen wesentlich geringer ist als im Winter, wird durch die Versuche bestätigt.

6. Die normalen Reichweiten in der freien Ostsee betragen im Sommer etwa 10 km, im Winter 20 km. In der Nähe der Küsten waren sie geringer. Gelegentlich wurden mit denselben Apparaten nur 2 km, anderseits über 100 km erreicht; bei quadratischer Ausbreitung ohne Dämpfung würde sich eine Reichweite von über 1000 km ergeben.

7. Die Größe der Dämpfung ist innerhalb der hörbaren Frequenzen unabhängig von der Frequenz. Für ganz tiefe Frequenzen konnten die Versuche wegen der praktischen Schwierigkeiten nicht zum Abschluß gebracht werden.

8. Aus dem Dämpfungsgesetz folgt, daß eine Verbesserung der Apparate nur einen unwesentlichen Einfluß auf die Reichweite haben kann. Diese ist vielmehr praktisch nur von dem Zustande des Wassers abhängig.

Dresden und Kiel, Dezember 1919.

(Eingegangen 16. Januar 1920.)

2. *Über eine physikalische Theorie der Bewegung
des Erdschattens in der Atmosphäre;
von H. Dember und M. Uibe.*

Achter Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa
ausgeführten Arbeiten.¹⁾

1. Die Erde wirft im Strahlengang des Sonnenlichts einen Schattenkegel, der als Dämmerungserscheinung²⁾ in der Erdatmosphäre und bei Mondfinsternissen auf der Mondscheibe sichtbar ist. Die Aufgabe, den Anfang und das Ende einer der verhältnismäßig seltenen Mondfinsternisse zu berechnen, ist schon lange und mit großer Exaktheit gelöst. Dagegen sind von der täglich zweimal sichtbaren Erscheinung des Erdschattens in der Atmosphäre nur sehr wenige und vereinzelte zahlenmäßige Beobachtungen vorhanden. Die theoretischen Lösungsversuche der Fragen, wie die Höhe des obersten Schattenrandes³⁾ von der Sonnendepression abhängt und ob von dieser allein, sind über erste Ansätze nicht hinausgekommen. Es ist dies um so merkwürdiger, als es eine sehr auffällige Erscheinung bildet, daß der Schatten, z. B. des Abends, viel schneller aufsteigt, als die Sonne sinkt. Es liegen dazu Beobachtungen vor, besonders von Hellmann und Heim, die zeigen, daß der Schattenrand bereits bei einem Sonnenstand von 7–8° unter dem Horizont durch den Zenit geht. Ebensowenig ist eine Antwort auf die Frage gefunden worden, wodurch die von Tag zu Tag veränderliche Geschwindigkeit bedingt ist, mit welcher der Schatten des Morgens ab- und des Abends aufsteigt.

Sucht man die Umstände zu erkennen, die sich der Lösung des Problems entgegenstellen, indem man den Ver-

1) Aus den Leipziger Berichten 1910.

2) Dunkles Segment oder Gegendämmerung, zuerst beschrieben von Joh. Casp. Funcius, De Coloribus Coeli, Ulm 1716 und von J. J. de Mairan, Mem. de l'Acad. des Sciences 1731.

3) Erster östlicher oder westlicher Dämmerungsbogen.

such macht, eine rein astronomisch-geometrische Theorie aufzustellen, so sieht man, daß die Hauptursache darin besteht, daß es nicht auf die allgemeine Form des — bisher fast immer vorausgesetzten — schattenauffangenden Schirmes ankommt, sondern nur auf die absolute Entfernung des obersten Schattenrandes vom Beobachter. Ändert sich diese Entfernung, so ändert sich auch bei gleichbleibender Sonnentiefe der Winkel, unter welchem der Schattenrand über dem Horizont gesehen wird. Durch Sonnendepression und diesen Höhenwinkel ist die Entfernung des Schattenrandes geometrisch festgelegt, da die Dimensionen der Erde bekannt sind. Die so errechnete geometrische Beziehung gibt nach Einsetzung der beobachteten Höhe und der Sonnendepression eine zahlenmäßig ausreichende Beschreibung des Phänomens, aber keine physikalische Erklärung, warum der Schatten gerade die bestimmte beobachtete Höhe besitzt.

Führt man in die geometrische Beziehung die für die einzelnen Sonnendepressionen gemessenen Schattenrandhöhen ein, so erhält man das sehr auffällige Resultat, daß sich der Schattenrand mit wachsender Sonnendepression zuerst vom Beobachter schnell entfernt und später wieder nähert. Nach einer Anmerkung in der „Meteorologischen Optik“ von J. Pernter und F. M. Exner hat H. Mohn¹⁾ eine astronomisch-geometrische Berechnung der Bewegung des Erdschattens gegeben, worin er eine äußerste Schicht lichtreflektierender Teilchen annimmt, welche die Erdoberfläche konzentrisch umgibt. Das Bestehen einer solchen Schicht ist nach allem, was wir über die Verteilung der Heiligkeit am Himmel und von der Form des sichtbaren Himmelsgewölbes wissen, nicht wahrscheinlich. Es läßt sich leider aus der kurzen Bemerkung Exners nicht sehen, wie Mohn unter sich vergleichbare Werte für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter berechnet und auch nicht, wieweit eine Übereinstimmung seiner Theorie mit den Beobachtungen besteht. Eine rein astronomisch-geometrische Theorie kann, weil sie die physikalischen Eigenchaften der Atmosphäre außer acht läßt, nicht mehr leisten als eine Zahlenreihe sorgfältiger Beobachtungen des Zusammenhangs zwischen Sonnendepression und Schattenrand-

1) H. Mohn, Hannband der Meteorolog. Z. S. 1906. Das Original ist uns nicht zugänglich.

höhe, zumal eine solche Theorie eine Erklärung der täglichen Variationen hilflos gegenübersteht.

Ein Ansatz zu einer physikalischen Theorie liegt von Felix Exner¹⁾ vor. Er stellt durch eine Erweiterung der Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels ein Integral für die Himmelshelligkeit H in verschiedenen Höhen über dem Horizont auf. Für einen bestimmten Höhenwinkel φ über dem Horizont muß dann $dH/d\varphi$ einen Sprung erleiden, und zwar an der Grenze des Erdschattens gegen den von den Sonnenstrahlen noch direkt beleuchteten Himmel; denn nach der ursprünglichen Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels ist die Helligkeit im Erdschattenraum gleich Null, da nur das Licht berücksichtigt wird, welches die vom Sonnenlicht direkt getroffenen Luftmolekülen aussenden und nicht dasjenige, welches jeder einzelnen Molekel von allen anderen zugestrahlt wird. In der Betrachtung kommen keine geometrischen Beziehungen vor, welche die Dimensionen der schattenwerfenden Erde selbst einführen, und damit fehlt auch ein Maß für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter.

Stellt man an die Stelle der nach Rayleigh ausgewerteten Helligkeiten die für die Horizonthelligkeiten gut stimmenden²⁾ mit Hilfe der Wienerschen Theorie gerechneten, so wäre diese Theorie für Sonnenstände unter dem Horizont und durch Einführung der Erddimensionen zu erweitern, so daß sich auch die Helligkeit im Erdschattenraum ergibt. Die Gleichungen werden jedoch unhandlich und sie enthalten außerdem eine so große Anzahl von Konstanten, deren Größe in den unteren atmosphärischen Schichten nicht nur unbekannt, sondern auch schwer zu bestimmen ist, daß eine befriedigende Darstellung auf solche Weise vorläufig nicht erreichbar erscheint, zumal auch mit untergehender und untergegangener Sonne eine Verschiebung der hauptsächlich wirksamen Lichtwellenlängen eintritt, worauf die Theorie keine Rücksicht nimmt. Die folgenden Ausführungen werden überdies zeigen, daß von allen mathematischen und experimentellen Schwierigkeiten abgesehen, die von Exner vorgeschlagene Methode

1) Felix M. Exner, Pernter-Exners Meteorolog. Optik, S. 790.

2) Vgl. den 5. dieser Berichte: M. Uibe, Leipziger Inaug.-Diss. 1919. Abhandlungen der math.-phys. Klasse der S. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. 85. Nr. VI. 1918.

den Umstand der variablen absoluten Schattenrandentfernung außer acht läßt und deswegen nicht zum Ziele führen kann.

Ein gangbarer Weg bietet sich in der experimentellen Festlegung der *Entfernung* des Schattenrandes vom Beobachter unter Angabe der physikalischen Gründe für deren Variation und in der Benutzung einer astronomisch-geometrischen Beziehung zwischen der Höhe des Schattenrandes und der Sonnendepression, unter Berücksichtigung der Refraktion der Sonnenstrahlen.

Nach den Ergebnissen vorangehender Berichte¹⁾ hat sich die Anschauung bewährt, daß die Entfernung der äußersten sichtbaren Grenze des klaren Himmelsgewölbes und damit dessen Form durch die Größe der maximalen Sichtweite in jeder einzelnen Höhe über dem Horizont festgelegt ist. Als Mittel, diese Sichtweiten zu messen, haben wir die Helligkeit der anvisierten Stelle des Himmels — oder besser ausgedrückt der gesamten leuchtenden Luftsäule in einer bestimmten Richtung — angegeben, und zwar besteht für die klare blaue Atmosphäre die einfache Beziehung

$$(1) \quad S = c \sqrt{H},$$

worin S die maximale Lichtweite, c eine Konstante und H die photometrisch festzustellende Himmelshelligkeit bedeutet. Die Beziehung ist bisher nur für klare Luft als gültig gefunden worden und sie muß ihre Gültigkeit verlieren, wenn die dem Horizont nahen Schichten getrübt sind und wenn sehr große, blendende Helligkeiten in Frage kommen.

Wir wollen als Grundlage der folgenden Entwicklungen die Vorstellung festhalten, daß der obere Rand des Erdschattens am Endpunkte der maximalen Sichtweite des dem Schattenrande unmittelbar anliegenden Schattenraumes gesehen wird und daß die Helligkeit der in diesem Raum liegenden Luftmasse ein Maß für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter ist.

2. In der Fig. 1 sei $ETNP$ ein die Erdkugel TOG in T tangierender, durch die Refraktion gekrümmter Lichtstrahl, der vom obersten Rand der untergegangenen Sonne S kommt.

Der Strahl tritt bei E in die optisch wirksame Atmosphäre EH_2ZPH_1 ein und bei P wieder aus. Die Gesamtrefraktion,

1) Vgl. den 6. und 7. dieser Berichte: Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. **69**. S. 391—509. 1917. Ann. d. Phys. **61**. S. 313 und S. 353. 1920.

welche der Strahl beim Durchgang durch die Atmosphäre von E bis P erleidet, ist gleich der doppelten maximalen Refraktion, die ein Strahl in der Atmosphäre erfahren kann, also gleich der doppelten Horizontalrefraktion Δ_0 . Der Winkel, unter dem sich die beiden in E und P an die Bahn, die wir als kreisförmig annehmen wollen, gezogenen Tangenten

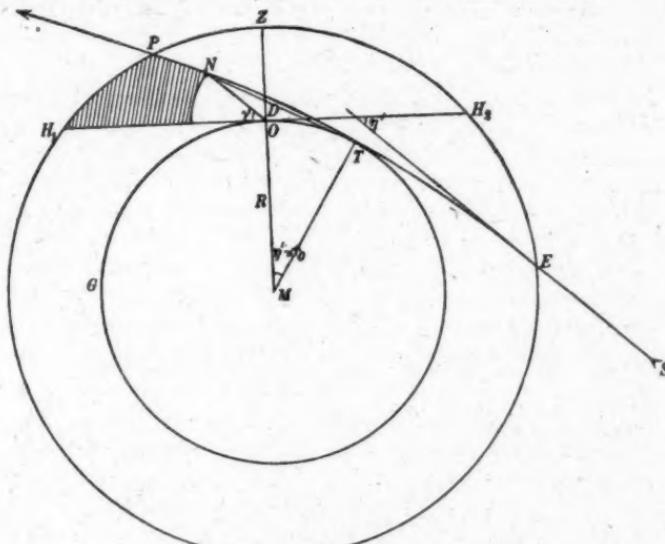


Fig. 1.

schneiden, ist gleich $2\Delta_0$. Es sei N der Schattenrand, dessen Erhebung über dem Horizont durch den Winkel $NOH_1 = \gamma$ vom Standpunkt des Beobachters in O gemessen wird. H_1 und H_2 sind die Schnittpunkte des äußersten Randes der optischen Atmosphäre mit der durch O gelegten Horizontalen. Die Refraktion, welche der Lichtstrahl auf der Strecke TN erfährt, sei Δ_1 , so daß die Gesamtrefraktion des Strahles von E bis N gleich $\Delta_0 + \Delta_1$ ist.

Ist η' der Depressionswinkel des obersten Sonnenrandes unter dem Horizont, so ist der Winkel $TMO = \eta' - \Delta_0$, wenn M der Mittelpunkt der Erde ist. Die Verbindungslinie NT schneidet die Verlängerung $MO = R$ des Erdradius im Punkte D . Im Dreieck DTM ist nun der Winkel

$$DTM = 90^\circ - \frac{\Delta_1}{2},$$

was man leicht sieht, wenn berücksichtigt wird, daß die Verbindungsstrecke $\bar{N}T$ mit der Tangente bei T den Winkel $\Delta_1/2$ und die letztere mit der Tangente an den Lichtstrahl im Punkte N den Winkel Δ_1 bildet. Es ist

$$\overline{MD} = R \frac{\cos \frac{\Delta_1}{2}}{\cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right)}$$

und da

$$\overline{OD} = \overline{MD} - R,$$

so wird

$$\overline{OD} = R \frac{\cos \frac{\Delta_1}{2} - \cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right)}{\cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right)}$$

Wir können nun \overline{OD} auch im Dreiecke OND ausdrücken. In diesem ist

$$\overline{OD} = \overline{ON} \frac{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}{\cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right)}.$$

Wird dies dem obigen Ausdruck für \overline{OD} gleich gesetzt, so erhält man für den Abstand des Schattenrandes vom Beobachter

$$(2) \quad \overline{ON} = R \cdot \frac{\cos \frac{\Delta_1}{2} - \cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right)}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}.$$

Die Horizontalrefraktion Δ_0 beträgt $95'$, so daß $\Delta_1/2$ sicherlich stets kleiner als $17,5'$ ist. Den $\cos 17,5'$ können wir mit hinreichender Genauigkeit gleich 1 setzen und es wird

$$(3) \quad \overline{ON} = R \frac{1 - \cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right)}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)} = \frac{2R \sin^2 \frac{\eta' - (\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2})}{2}}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}.$$

Hierin ist nun Δ_1 durch das bekannte Δ_0 , und η' durch eine astronomische Zeitbestimmung auszudrücken.¹⁾ Es ist weiter

$$\eta' = \eta - \varrho,$$

1) Von der Refraktion auf der Strecke \bar{NO} sehen wir ab.

worin η die Depression des Sonnenmittelpunktes und η' der scheinbare Radius der Sonne ist.

Zur Bestimmung der Abhängigkeit des Winkels Δ_1 von Δ_0 können wir von der Beziehung ausgehen

$$\overline{TN} = 2r \sin \frac{\Delta_1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{TE} = 2r \sin \frac{\Delta_0}{2},$$

worin r der Radius der Kreisbahn des Lichtstrahles $ETNP$ ist. Es folgt

$$(4) \quad \overline{TN} : \overline{TE} = \sin \frac{\Delta_1}{2} : \sin \frac{\Delta_0}{2}.$$

Die Strecke \overline{TE} verhält sich zum Kreisbogen \widehat{TE} wie

$$2r \sin \frac{\Delta_0}{2} : r \Delta_0,$$

daher ist

$$\overline{TE} = \widehat{TE} \cdot \frac{2 \sin \frac{\Delta_0}{2}}{\Delta_0}.$$

Im Dreieck NOT ergibt sich für \overline{TN} der Wert

$$\overline{TN} = 2R \cdot \frac{\sin \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin \left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \right)}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen und (4) folgt

$$\frac{\overline{TN}}{\overline{TE}} = \frac{\sin \frac{\Delta_1}{2}}{\sin \frac{\Delta_0}{2}} = R \cdot \frac{\sin \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin \left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \right) \cdot \Delta_0}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right) \cdot \widehat{TE} \sin \frac{\Delta_0}{2}}$$

und daraus die gesuchte Beziehung

$$(5) \quad \sin \frac{\Delta_1}{2} = \Delta_0 \cdot \frac{R}{\widehat{TE}} \cdot \frac{\sin \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin \left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \right)}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}.$$

Zur Berechnung der Länge des Bogens \widehat{TE} , d. h. der Hälfte des maximalen Lichtweges eines Strahles in der Atmosphäre, benutzen wir die schon von Lambert angewandte Methode der Berechnung der Höhe der optisch wirksamen Atmosphäre aus dem Depressionswinkel der Sonne beim Schluß der astronomischen Dämmerung ($\eta = \sim 18^\circ$) und man

erhält so für \overline{TE} einen Wert von rund 1000 km. Der gleiche gleiche Wert folgt, wenn man die Höhe der optischen Atmosphäre zu 70–80 km annimmt nach Beobachtungen, die O. Jesse¹⁾ an den höchsten leuchtenden Wolken angestellt hat. Diese Höhe entspricht auch der obersten Schicht der Stratosphäre und der Höhe der Atmosphärenschicht, in welcher die Sternschnuppen zuerst aufleuchten. J. Maurer²⁾ setzt in seiner Extinktionstheorie das Verhältnis von Atmosphärenhöhe zu Erdradius gleich $1/100$, nimmt also, mit dem obigen fast übereinstimmend, als Höhe der optisch wirksamen Atmosphäre den Wert 64 km an.

Unter Berücksichtigung der Kleinheit von $\Delta_1/2$ und des Erdradius $R = 6370$ km erhält man bei einem $\Delta_0 = 35'$

$$(6) \quad \Delta_1 = 446' \frac{\sin \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin \left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2} \right)}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich Δ_1 für je zwei zusammengehörige Werte von η' und γ durch sukzessive Annäherung schnell berechnen. Der so erhaltene Wert ist in die Gleichung (3) einzusetzen. Zur Berechnung von η haben wir mit Hilfe eines Sextanten und eines künstlichen Horizonts, der aus flüssigem Holztee bestand, die Ortszeit aus Sonnenhöhenmessungen bestimmt. Ist φ die geographische Breite des Beobachtungs-ortes (Vilaflor liegt in $\varphi = 28^\circ 11' \text{ n.}$, $\lambda = 1^\text{h} 6^\text{m} 28^\text{s} \text{ w.}$), z die wahre Zenitdistanz der Sonne, δ ihre Deklination, t der Stundenwinkel vom wahren Mittag aus gerechnet, T die mittlere Ortszeit und G die Zeitgleichung, so gelten die bekannten Beziehungen

$$(7) \quad \begin{cases} \cos(90^\circ + \eta) = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t \\ \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - \varphi) \cdot \sin(\sigma - \delta)}{\cos \sigma \cdot \cos(\sigma - z)}}; \quad \sigma = \frac{1}{2}(\varphi + \delta + z) \\ \quad \quad \quad t = T - G. \end{cases}$$

Ist der Standort des Beobachters in der Höhe h über der Oberfläche der Erdkugel, z. B. im Luftballon oder auf Bergen,

1) O. Jesse, Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin. 40. S. 1031. 1890; 26. S. 467. 1891. Zitiert nach Mascart, Traité d'Optique.

2) Vgl. G. Müller, Photometrie der Gestirne. S. 231. 1897.

so nimmt die Gleichung (3), nach einer analogen Ableitung, die Gestalt an

$$(3a) \quad \overline{ON} = \frac{2R \sin^2 \frac{\eta' - \left(\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} - \frac{h \cdot \cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Auch hier bleibt vorausgesetzt, daß die Meeresoberfläche und nicht Landerhebungen den Schattenrand werfen. Die Gleichung (6) für Δ_1 behält mit genügender Annäherung ihre Form bei, auch wenn der Beobachter sich in einer Höhe von 1500 m über dem Meere befindet, wie wir in Vilaflor.

Die vorangehenden astronomisch-geometrischen Beziehungen (3, 3a, 6 und 7) beherrschen zahlenmäßig die gesamte Erscheinung des Erdschattens in der Atmosphäre. Es bleibt nun noch übrig, die Entfernung \overline{ON} des Schattenrandes vom Beobachter physikalisch zu deuten und sie der Messung zugänglich zu machen.

3. Nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang befindet sich der Beobachter innerhalb des Erdschattens und er sieht diesen unten am Horizont tief dunkelblau mit scharfem oberen Rande *vor* dem Himmelgewölbe stehen. Mit tiefer sinkender Sonne färbt sich der Schatten, d. h. die Luftmasse vor dem Beobachter, dunkelviolett, dann hellblau¹⁾, der äußere Rand wird, höher steigend, verwaschen und schließlich bei etwa 14° Höhe über dem Horizont ist der dann graublaue Schatten in der subtropischen Breite Teneriffas mit bloßem Auge nicht mehr vom übrigen Himmel zu unterscheiden.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Schatten auf- oder absteigt, ist bedeutend größer als die Geschwindigkeit, mit der die Sonne unter- oder aufgeht. Die Tabelle 1 gibt zusammengehörige Werte von η und γ . Die Werte für γ bei $\eta < 2^\circ$ sind mit¹⁾ denen anderer Beobachter nicht vergleichbar, da bei unseren Beobachtungen unter diesen Depressionen nicht die Meeresoberfläche, sondern die Gebirge der Insel den Schattenrand werfen.

1) Mehrere schöne farbige Darstellungen siehe bei A. Heim, Luftfarben. Zürich 1912.

Das schnelle Aufsteigen wird meist in der Weise erklärt, daß der Erdschatten auf das Himmelsgewölbe wie auf einen festen Projektionsschirm geworfen wird, wodurch sich allerdings qualitativ bei der im Verhältnis zu den Erddimensionen geringen Entfernung des Himmelsgewölbes vom Beobachter ein schnelles Aufsteigen des Schattens folgern läßt. Diese verbreitete Anschauung ist aber ganz besonders aus dem Grunde nicht haltbar, weil sich bei der flachen Form des Himmelsgewölbes¹⁾ der Schattenrand dem Beobachter ständig nähern müßte und sich nicht anfangs entfernen, wie es die geometrische Beziehung (3) für die Strecke ON , nach Einführung beobachteter zusammehöriger Werte von η' und γ , für die Beobachtungen in der Nähe des Horizonts fordert.

Der subjektive, bei klarem Wetter zwingende Eindruck, daß der Erdschatten *körperlich vor* dem darüber helleren Himmelsgewölbe steht und sich nicht flächenhaft auf das Gewölbe projiziert, führt dazu, die Sichtweitentheorie²⁾ auch auf das Innere des Schattens anzuwenden. Dann folgt ohne weiteres, weil die Helligkeit innerhalb des Schattenraumes geringer ist als außerhalb desselben, daß der Schatten für das Auge vor dem Himmelsgewölbe stehen muß, da wegen der Dunkelheit die Sichtweite im Schattenraum geringer ist als außerhalb in der erleuchteten Luft. *Danach sehen wir, im Schattenraum stehend, in die Tiefe desselben hinein, und zwar gerade so weit, wie es die Helligkeit der Luftmolekülen innerhalb dieses Raumes bedingt und den Schattenrand sehen wir am Ende der maximalen Sichtweite des Schattenraumes.*

Dort, wo der Erdschattenkegel von der Kugelfläche geschnitten wird, die mit der maximalen Sichtweite als Radius um den Standpunkt des Beobachters geschlagen ist, erblicken wir den Schattenrand und dort zeigen ihn auch unsere Meßinstrumente an.

Die Fig. 2 gibt eine schematische Darstellung des Schattens. Die Buchstaben NOZ haben die gleiche Bedeutung wie in der Fig. 1. H_3ZH_4 ist aber hier nicht die Grenze der optischen Atmosphäre, sondern die Begrenzung des vom Beobachter von O aus gesehenen abgeplatteten Himmelsgewölbes.

1) Vgl. den 3., 6. und 7. dieser Berichte a. a. O. 69. S. 139—148, 391—411 und 485—509. 1907. Ann. d. Phys. 55. S. 387 u. a. a. O.

2) Vgl. Bericht Nr. 6.

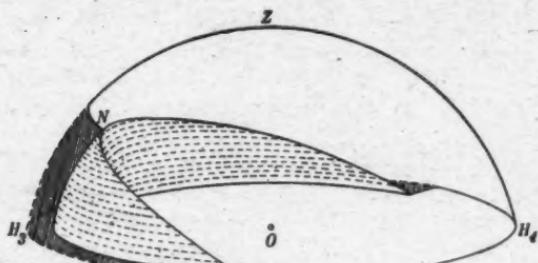


Fig. 2.

Es ist nun die Entfernung vom Beobachter bis zum Schattenrand

$$ON = c \sqrt{H}$$

nach Gleichung (1) und daher nach Gleichung (3) bzw. (9a)

$$(8) \quad c \sqrt{H} = R \frac{2 \sin^2 \frac{\eta' - (\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2})}{2}}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}$$

oder für Höhen h über dem Meere

$$(8a) \quad c \sqrt{H} = R \frac{2 \sin^2 \frac{\eta' - (\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2})}{2}}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)} - \frac{h \cos \left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right)}{\sin \left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right)}.$$

4. Der aufsteigende Schatten erscheint nicht schwarz, sondern er zeigt selbst dicht über dem Horizont eine dunkelblaue Farbe mit photometrisch gut meßbarer Helligkeit. Die Luft des Schattenraumes zwischen dem Beobachter und der Grenze der optischen Atmosphäre erhält diffuses Licht, vorzüglich blaues und violettes von dem beleuchteten Teil des Himmels und dann Licht, welches vom Erdboden reflektiert wird. Mit sinkender Sonne müßte der Schattenraum dunkler werden, weil die Gesamthelligkeit des Himmels abnimmt, wobei vorausgesetzt ist, daß nur die Ursachen, welche die allgemeine Himmelshelligkeit bedingen, die Schattenhelle beeinflussen. Die absolute Helligkeit des Schattens nimmt jedoch, wie unsere Messungen zeigen, nach Sonnenuntergang anfangs

zu, wie es das Auge auch zur Empfindung bringt, trotzdem andere Stellen des Himmels, z. B. der Zenit, schnell an Helligkeit verlieren. Tab. 1 zeigt einen solchen Helligkeitsabfall

Tabelle 1.

6. Juli 1918.

η	H_s	γ	η	H_s	γ
0° 57,5'		2,0°	2° 48,8'		5,8°
1 21,0	47,0		2 51,8	7,0	
1 32,8	38,0	3,0	2 54,7		7,8
1 52,5	30,0	3,9	3 18,5	4,0	
2 7,7	19,0	4,2	3 58,4	1,2	10,0
2 31,8	12,8				

im Zenit nach Sonnenuntergang, zugleich die Höhe γ des Erdschattenrandes als Funktion der Sonnendepression η . H_s ist die Helligkeit im Zenit in willkürlichen Einheiten, lichtelektrisch gemessen. Da beim Anwachsen der Helligkeit des Schattenraumes die Sonne untergegangen ist — wenn wir den Schatten abends betrachten — die diffuse Himmelsstrahlung sowie der Bodenreflex dieser Strahlung mit sinkender Sonne abnimmt, so muß eine neue Lichtquelle dem Schattenraum Licht zustrahlen, und zwar eine, die so beschaffen ist, daß ihre Strahlung mit sinkender Sonne, d. h. aufsteigendem Erdschatten, zunimmt. Als derartige Lichtquelle kann nur das „erste Purplicht“ in Betracht kommen. In den Subtropen ist ein gut sichtbarer Erdschatten regelmäßig von einem hell strahlenden ersten Purplicht der Gegenseite begleitet. Wie helleuchtend in den Subtropen das erste Purplicht ist, geht auch daraus hervor, daß es, was von Miethe und Lehmann beobachtet wurde, einen zweiten, schwachen Erdschatten hervorrufen kann.

Nach den Beobachtungen, die Miethe und Lehmann¹⁾ in Ägypten (Assuan) ausgeführt haben, in einer geographischen Breite, die mit derjenigen Teneriffas fast gleich ist und wo sehr ähnliche klimatische Verhältnisse herrschen, nimmt das erste Purplicht des Abends bei einer Sonnendepression von 1,8° seinen Anfang, erreicht das Maximum der Helligkeit

1) O. Miethe u. H. Lehmann, Meteorolog. Z. S. S. 97 ff. 1909.

bei 3^0 und ist bei $\eta = 6,3^0$ zu Ende. Es steht also nach dem Vorangehenden zu erwarten, daß der Erdschatten bei etwa 3^0 Sonnendepression seine größte Helligkeit und damit — wenn die Theorie richtig ist — seine größte Entfernung erreicht. Unsere Messungen zeigen, daß der geforderte Parallelismus zwischen Entfernung und Helligkeit des Schattens besteht. Vgl. Tab. 2.

Tabelle 2.

11. Oktober 1918, abends

η'	γ	Δ_1	\overline{ON}	H
$2^0 0,55'$	$3^0 18'$	$7,4'$		$0,68$
$2 52,81$	$6 37$	$11,1$	$41,8 \text{ km}$	$0,86$
$3 39,18$	$10 42$	$14,1$	$51,6$	$1,00$
$3 55,01$	$13 12$	$14,9$	$48,9$	$0,72$

H ist mit dem lichtelektrischen Photometer 1^0 unter dem Schattenrand in willkürlichen Einheiten gemessen. Aus den ersten Werten ist \overline{ON} nicht berechnet worden, da die geringe Dicke der Schattenschicht über den Beobachtern (300 m) nicht die Gewähr leistete, daß die Meeresoberfläche und nicht Gebirgskämme der Insel den Schatten warfen.

- Beim Abnehmen der Helligkeit des Schattenraumes nähert sich der Schattenrand dem Beobachter wegen der verminderten Sichtweite. Der an ihn schnell heranrückende Schattenrand bekommt infolge seines geringer werdenden Abstandes eine so stark wachsende Winkelgeschwindigkeit, daß es möglich wird, daß der Schattenrand bereits bei einer Sonnendepression von 7^0 durch den Zenit geht. Es ist hiernach das Dunklerwerden des Schattens und das dadurch bedingte Näherrücken des Randes die direkte Ursache für das schnelle Hochsteigen.

Bei $\gamma = 14$ bis 15^0 war bei allen unseren Beobachtungen der Erdschattenrand nichr mehr wahrnehmbar. Wohl nur ganz ausnahmsweise und unter hervorragend günstigen Umständen wird der Schatten über 15^0 beobachtet.¹⁾ Ein solcher atmosphärischer Umstand braucht nicht etwa besondere Reinheit

1) G. Hellmann, vgl. Pernter-Exner, S. 756. — A. Heim, a. a. O. S. 75.

der Luft zu sein, es scheint vielmehr, daß ein empfindlicher Farbkontrast zwischen Schatten und erleuchtetem Himmel notwendig ist.

Da sich die optischen Eigenschaften der Atmosphäre und damit die Sichtweiten von Tag zu Tag ändern, so erklärt sich auch die verschiedene Geschwindigkeit des Aufsteigens des Schattenrandes aus der täglichen Veränderung der maximalen Sichtweiten.

Vilaflor (Chasna) auf Teneriffa, 18. April 1919.

(Eingegangen 27. Januar 1920.)

**3. Der Strahlungsdruck
auf Kreiszylinder aus beliebigem Material;
von Günther Thilo.**

(Breslauer Dissertation.)

§ 1. Einleitung.

Das Problem der Beugung ebener, elektromagnetischer, polarisierter Wellen an Kreiszylindern ist behandelt worden von v. Ignatowsky¹⁾, Seitz²⁾ und Schaefer und Großmann.³⁾ Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem von einer ebenen, polarisierten, elektromagnetischen Welle auf einen unendlich langen Kreiszylinder ausgeübten Strahlungsdruck, und zwar sei die elektrische Kraft der einfallenden Welle entweder parallel oder senkrecht zur Zylinderachse polarisiert. Die Dielektrizitätskonstante ϵ , die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit σ des Zylinders seien beliebig. Es sei bemerkt, daß die im folgenden abgeleitete Formel für den Strahlungsdruck nicht nur für einen, sondern für beliebig viele koaxiale Zylinder unverändert gilt, nur sind im letzteren Falle die Koeffizienten a_m komplizierter gebaut. Der Strahlungsdruck wird für einen Wasserzylinder von 1 cm Radius als Funktion der Wellenlänge der einfallenden Strahlung in einem größeren Intervall numerisch berechnet, um seinen Zusammenhang mit den Eigenschwingungen des Zylinders zu beleuchten. Im Anhang werden die Formeln für das durch zwei koaxiale Zylinder gestörte Feld abgeleitet.

1. Teil.

**Die elektrische Kraft ist parallel der Zylinderachse polarisiert
(im folgenden als \parallel Fall bezeichnet).**

§ 2. Das Feld im \parallel Falle.

Es wird ein rechtshändiges Koordinatensystem zugrunde gelegt (vgl. Fig. 1). Die Achse des ∞ langen Zylinders falle

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. S. 495. 1905.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. S. 746. 1905; 19. S. 554. 1906.

3) Cl. Schaefer, Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe. XII. Heft 4. S. 349; Cl. Schaefer u. F. Großmann, Ann. d. Phys. 31. S. 455. 1910.

mit der z -Achse zusammen, der Zylinderradius sei ϱ_1 . Die einfallende ebene Welle, deren elektrische Kraft \parallel der z -Achse polarisiert sei, schreite in Richtung der abnehmenden x fort.

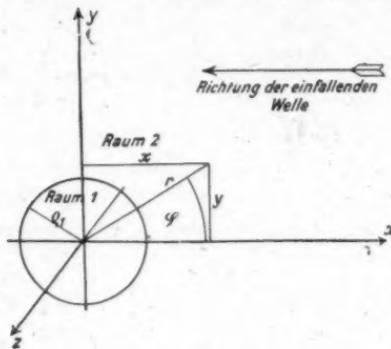


Fig 1.

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_\varphi = \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r}, \\ \frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{E}_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Im vorliegenden Falle wird $\mathfrak{E}_r = 0$, $\mathfrak{E}_\varphi = 0$, $\mathfrak{H}_z = 0$, und es verschwinden alle Ableitungen nach z , da der Zylinder ∞ lang ist. Damit gehen die Gleichungen (1) über in:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \varphi}. \end{array} \right. \quad 1)$$

1) Der Index z kann als überflüssig weggelassen werden.

Elimination von \mathfrak{H}_r und \mathfrak{H}_φ gibt:

$$(3) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \varphi^2}.$$

Um zu einer Integration von (3) zu kommen, setze man

$$(4) \quad \mathfrak{E} = e^{int} \sum_0^{\infty} R_m \cos m\varphi,$$

wo m eine positive, ganze Zahl ist. Dies in (3) eingesetzt gibt:

$$\sum_m \left[R_m'' + \frac{1}{r} R_m' + \left\{ \frac{\varepsilon \mu n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu n \sigma}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right\} R_m \right] \cos m\varphi = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes φ gelten muß, muß jeder einzelne Summand 0 werden, also ist, wenn

$$(5) \quad \frac{\varepsilon \mu n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu n \sigma}{c^2} = k^2$$

ist,

$$(6) \quad \frac{d^2 R_m}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{d R_m}{d(kr)} + \left\{ 1 - \frac{m^2}{k^2 r^2} \right\} R_m = 0.$$

Das ist aber die Besselsche Differentialgleichung von der Ordnung m und dem Argument kr . Sie wird gelöst durch die Besselschen Funktionen 1. und 2. Art $J_m(kr)$ und $K_m(kr)$. Das allgemeine Integral von (3) lautet also:

$$(7) \quad \mathfrak{E} = e^{int} \sum_0^{\infty} \{ b_m J_m(kr) + a_m K_m(kr) \} \cos m\varphi.$$

Das Innere des Zylinders werde als Innenraum (Raum 1), der übrige Raum als Außenraum (Raum 2) bezeichnet. Die Materialkonstanten im Raume 1 seien $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, die Koeffizienten werden mit a', b' , die elektrische Kraft mit \mathfrak{E}_1 bezeichnet. Entsprechend im Raume 2: $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2, a'', b'', \mathfrak{E}_2$.¹⁾ Raum 2 sei das Vakuum, also

$$\varepsilon_2 = \mu_2 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad k_2 = \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Es ist also:

$$\mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^{\infty} (b_m' J_m + a_m' K_m) \cos m\varphi.$$

Für $r = 0$ wird $K_m(kr) = \infty$, da aber $(\mathfrak{E}_1)_{r=0}$ endlich bleiben muß, so folgt $a_m' = 0$. Also:

1) Die Bezeichnung der Indizes ist *umgekehrt* wie in der Schaefer-Großmannschen Arbeit (a. a. O.), da bei der Behandlung zweier ko-axialer Zylinder später drei Räume auftreten.

$$(8) \quad \mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^{\infty} b_m^e J_m \cos m \varphi.$$

Die elektrische Kraft \mathfrak{E}_2 setzt sich zusammen aus der einfallenden und der vom Zylinder abgebeugten Welle, also $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_b$. \mathfrak{E}_e und \mathfrak{E}_b müssen natürlich der Gleichung (3) gehorchen. Also:

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m^e J_m + a_m^e K_m\} \cos m \varphi$$

$$+ e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m^b J_m + a_m^b K_m\} \cos \varphi$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten dienen folgende Grenzbedingungen:

Die tangentialen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} sind bei $r = \rho_1$ stetig:

$$(9) \quad \begin{cases} (\mathfrak{E}_1)_{r=\rho_1} = (\mathfrak{E}_2)_{r=\rho_1}, \\ (\mathfrak{H}_{\varphi_1})_{r=\rho_1} = (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\rho_1}, \\ \text{oder nach (2):} \\ \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r} \right)_{r=\rho_1} = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r} \right)_{r=\rho_1}. \end{cases}$$

Ferner muß für $r = \infty$ die vom Zylinder hervorgebrachte Störung verschwunden sein, d. h. es darf dort nur die einfallende Welle vorhanden sein, also:

$$(\mathfrak{E}_2)_{r=\infty} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (ct + x)} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (ct + r \cos \varphi)} = e^{int} \cdot e^{ikr \cos \varphi} = (\mathfrak{E}_e)_{r=\infty}.$$

Die Entwicklung von e^{ikr} nach Besselschen Funktionen entnehme ich dem Lehrbuch von Gray-Matthews.¹⁾

$$e^{ikr \cos \varphi} = J_0(kr) + \sum_1^{\infty} 2i^m J_m(kr) \cos m \varphi.$$

Also ist

$$(\mathfrak{E}_e)_{r=\infty} = e^{int} \{J_0(kr) + \sum_1^{\infty} 2i^m J_m(kr) \cos m \varphi\},$$

d. h.

$$(10) \quad a_m^e = 0, \quad b_0^e = 1; \quad b_m^e = 2i^m.$$

\mathfrak{E}_b stellt die vom Zylinder nach außen fortschreitende Beugungswelle dar, b_m^b und a_m^b müssen also so bestimmt

1) Gray and Matthews, Treatise on Bessel functions. S. 18. Formel 89.

werden, daß diese Bedingung, d. h. eben nach außen fortschreitende (von $r = 0$ aus divergierende) Zylinderwellen, erfüllt ist. Ich entnehme die Bedingungsgleichung einer Arbeit von A. Sommerfeld.¹⁾ Ist $\Delta u + k^2 u = 0$ die Schwingungsgleichung, so lautet die Bedingungsgleichung für nach außen fortschreitende Zylinderwellen:

$$(11) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + ik u \right\} = 0. \quad 2)$$

Setzt man $\mathfrak{E} = e^{int} \cdot u(r, \varphi)$ in (3) ein, so ergibt sich: $\Delta u + k^2 u = 0$. Im vorliegenden Falle ist also:

$$u = \sum_0^{\infty} \{ b_m^b J_m + a_m^b K_m \} \cos m \varphi.$$

Dies in (11) eingesetzt gibt:

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \{ k b_m^b J_m' + k a_m^b K_m' + i k b_m^b J_m + i k a_m^b K_m \} = 0,$$

denn das Σ fällt wieder weg (vgl. S. 533). Bei großen Werten des Arguments kann man für J_m und K_m folgende asymptotischen Werte benutzen³⁾:

$$(13) \quad \begin{cases} J_m(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left(\frac{2m+1}{4} \pi - kr \right), \\ K_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sin \left(\frac{2m+1}{4} \pi - kr \right). \end{cases}$$

Setzt man (13) in (12) ein, so erhält man:

$$b_m^b = -\frac{i\pi}{2} a_m^b.$$

Damit wird

$$\mathfrak{E}_b = e^{int} \sum_0^{\infty} a_m^b \left\{ K_m - \frac{i\pi}{2} J_m \right\} \cos m \varphi = e^{int} \sum_0^{\infty} a_m^b Q_m \cos m \varphi,$$

wenn

$$K_m - \frac{i\pi}{2} J_m = Q_m$$

1) A. Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresbericht der deutschen Mathemat.-Vereinigung. 21. Heft 10/12. S. 309. 1912.

2) Bei Sommerfeld steht in der Klammer $-ik u$; das liegt daran, daß dort der Zeitfaktor e^{-int} heißt, während er bei mir e^{+int} ist.

3) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln. 1909. Meine Bezeichnungen schließen sich an Jahnke-Emde an.

ist.¹⁾ Setze ich noch

$$(14) \quad b_m^e = b_m'' \quad \text{und} \quad a_m^e = a_m'',$$

so wird

$$(15) \quad \mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r)\} \cos m \varphi. \quad ^2)$$

Der Ansatz

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m J_m + a_m K_m\} \cos m \varphi$$

liefert für $r = \infty$ stehende Wellen, wie man sofort sieht, wenn man für J_m und K_m die Werte (13) einsetzt. Nach (10) ist:

$$b_0'' = 1, \quad b_m'' = 2i^m.$$

Zur Bestimmung der a_m'' dienen die Bedingungen (9)

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^{\infty} b_m' J_m(k_1 \varrho_1) \cos m \varphi \\ \quad = \sum_0^{\infty} \{b_m'' J_m(k_2 \varrho_1) + a_m'' Q_m(k_2 \varrho_1)\} \cos m \varphi, \\ \frac{1}{\mu_1} \sum_0^{\infty} b_m' k_1 J_m'(k_1 \varrho_1) \cos m \varphi \\ \quad = \sum_0^{\infty} k_2 \{b_m'' J_m'(k_2 \varrho_1) + a_m'' Q_m'(k_2 \varrho_1)\} \cos m \varphi. \quad ^3) \end{array} \right.$$

Zur übersichtlicheren Rechnung werden folgende Bezeichnungen eingeführt: Der die Ordnung bezeichnende Index m wird durchgängig weggelassen. Die Funktionen J , K und Q erhalten die Argumentsbezeichnung in Indexform als zweistellige Zahl. Die erste Zahl bedeutet das k , die zweite das ϱ , also:

1) Es ist $Q_m = -\frac{i\pi}{2} H_m^{(2)}$, wo $H_m^{(2)}$ die Hankelsche Zylinderfunktion 2. Gattung ist.

2) In den Arbeiten von v. Ignatowsky und Schaefer a. a. O. ist dieser Ansatz für die elektrische Kraft im Außenraum richtig gemacht, aber sein Zusammenhang mit der Ausstrahlungsbedingung nicht ausgesprochen. Bei Seitz ist angesetzt $b_m J_m + a_m K_m$; dieser Ansatz ist also nicht richtig, da er im ∞ stehende Wellen liefert. In der zweiten Arbeit von Seitz ist der Ansatz in $b_m J_m + a_m Q_m$ verbessert. Auch in einer alten Arbeit von J. J. Thomson ist die falsche Lösung angesetzt. (Recent researches on Electricity and Magnetism. S. 428.)

3) $\mu_1 = 1$.

$$J_{11} = J_m(k_1 \varrho_1), \\ K_{21} = K_m'(k_2 \varrho_1) \text{ usw.}$$

Da die Gleichungen (16) für jedes φ gelten müssen, sind die einzelnen Summanden gleich, also:

$$b' J_{11} = b'' J_{21} + a'' Q_{21}, \\ \frac{1}{\mu_1} b' k_1 J_{11}' = b'' k_2 J_{21}' + a'' k_2 Q_{21}'.$$

Es folgt:

$$(17) \quad a_m'' = 2i^m \frac{\frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - k_2 J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)}{k_2 J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1)}.$$

Für $m = 0$ heißt der Faktor nicht $2i^m$, sondern 1. Zur numerischen Berechnung ist folgende Form bequemer:

$$(17a) \quad \frac{2i^m}{a_m''} = \frac{k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1)}{\frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - k_2 J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Damit ist \mathfrak{E}_2 vollständig bestimmt. Die Koeffizienten b_m' haben kein Interesse.

§ 3. Eigenschwingungen im || Felde.

Unter Eigenschwingungen des Zylinders sind zu verstehen die Eigenschwingungen des Systems: Zylinder + umgebendes Vakuum. Die Bedingungsgleichung erhält man, wenn man die äußere Kraft (einfallende Welle) gleich 0 setzt. Also wird

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^\infty a_m'' Q_m \cos m\varphi,$$

$$\mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^\infty b_m' J_m \cos m\varphi.$$

Die Grenzbedingungen (9) liefern:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^\infty b_m' J_m(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi = \sum_0^\infty a_m'' Q_m(k_2 \varrho_1) \cos m\varphi, \\ \frac{k_1}{\mu_1} \sum_0^\infty b_m' J_m'(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi = k_2 \sum_0^\infty a_m'' Q_m'(k_2 \varrho_1) \cos m\varphi. \end{array} \right.$$

Das Summenzeichen fällt wieder weg. Division der Gleichung (18) durcheinander liefert die Bedingungsgleichung für die in den k_1 und k_2 steckenden Eigenfrequenzen:

$$(19) \quad k_2 J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1) = 0. \text{¹⁾}$$

(19) kann nur durch komplexe Argumente erfüllt werden. Das bedeutet aber, daß nur gedämpfte Eigenschwingungen existieren können. Die Dämpfung ist einmal Strahlungsdämpfung, und zweitens bei endlichem Leitvermögen des Zylinders Dämpfung durch Entwicklung Joulescher Wärme. Bei dielektrischen Zylindern ist nur Strahlungsdämpfung vorhanden. Ist ein komplexes $k_1 = p + iq$ (und damit ein k_2) gefunden, das Gleichung (19) erfüllt, so ist:

$$k_1 = p + iq = \frac{\epsilon \mu n^3}{c^2} - \frac{4\pi i \mu n \sigma}{c^2}.$$

Diese Gleichung kann nur durch ein komplexes $n = \alpha \pm i\beta$ erfüllt werden. α ist dann die Frequenz und β die Dämpfung der Eigenschwingung. Physikalisch brauchbar ist nur die Lösung $n = \alpha - i\beta$, wo $\beta > 0$, da sonst die Amplitude unbegrenzt zunimmt. Physikalisch realisierbar sind ungedämpfte Eigenschwingungen nur an dielektrischen Zylindern. Man kann nämlich die nach außen fortschreitende Strahlung, die die Dämpfung verursacht, durch einen in beliebiger Entfernung den dielektrischen Zylinder umgebenden Zylindermantel von ∞ großer Leitfähigkeit wieder zurückwerfen. Man bekommt dann an diesem Mantel stehende Wellen. Die Frequenzen der ungedämpften Eigenschwingungen hängen natürlich von der Entfernung des Mantels von der Zylinderachse ab. Ist diese Entfernung ∞ groß, so erhält man die Bedingungsgleichung für die ungedämpften Eigenschwingungen, wenn man ansetzt:

$$E_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} a_m'' K_m(k_2 r) \cos m \varphi,$$

denn dieser Ansatz liefert im ∞ stehende Wellen. Also wird die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(20) \quad k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1) = 0.$$

Dies stimmt mit dem reellen Teil von (19) überein, wenn man dort reelles Argument annimmt. Da (20) für jedes m

1) Zu beachten ist die formale Übereinstimmung von (19) mit dem Nenner von (17).

∞ viele Wurzeln hat und m von 0 bis ∞ läuft, existieren ∞^2 viele Eigenfrequenzen.

§ 4. Berechnung der magnetischen Feldkomponenten.

Die Komponenten $(\tilde{H}_r)_3$ und $(\tilde{H}_\varphi)_3$ findet man aus den Gleichungen (2). Da kein von der Zeit unabhängiges Magnetfeld vorhanden ist, kann man ohne Hinzufügen einer Integrationskonstante direkt integrieren. Es wird:

$$(21) \quad (\tilde{H}_\varphi)_3 = -i \cdot e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m'' J_m'(k_3 r) + a_m'' Q_m'(k_3 r)\} \cos m\varphi,$$

$$(22) \quad (\tilde{H}_r)_3 = -\frac{i}{r k_3} e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m'' J_m(k_3 r) + a_m'' Q_m(k_3 r)\} m \sin m\varphi.$$

§ 5. Berechnung des Strahlungsdruckes im \parallel Fall.

Es soll berechnet werden das zeitliche Mittel des von der einfallenden Welle auf den Zylinder ausgeübten Strahlungsdruckes. Die Kraft, die von elektromagnetischer Strahlung auf einen materiellen Körper ausgeübt wird, setzt sich zusammen aus den Maxwellschen Spannungen, die über eine beliebige, den Körper umschließende Fläche zu integrieren sind, und aus der Änderung des elektromagnetischen Impulses innerhalb dieser Fläche. Da im vorliegenden Falle nur das zeitliche Mittel des Druckes berechnet werden soll und ein rein periodischer Zustand vorliegt, ist der Druck, der von der Änderung des Impulses herrührt, im Mittel gleich 0; die Integration über die Maxwellschen Spannungen gibt also das zeitliche Strahlungsdruckmittel. Als Integrationsfläche wird ein dem materiellen Zylinder koaxialer Zylindermantel mit dem Radius r , wo $r > \varrho_1$ ist, gewählt. Die Maxwellschen Spannungen sind:¹⁾

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x^e = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) \mathfrak{n}_x + \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y \mathfrak{n}_y + \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_x \mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{E}_x^m = \frac{\mu}{8\pi} (\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) \mathfrak{n}_x + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y \mathfrak{n}_y + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x \mathfrak{n}_z. \end{array} \right.$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß nur ein Druck \parallel der

1) Vgl. z. B. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität (Teubner, 5. Aufl.) Bd. I, S. 154—155, Formeln 149, und S. 211, Formeln 177.

2) \mathfrak{n} ist der normale Einheitsvektor.

$$(19) \quad k_2 J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1) = 0. \text{¹⁾}$$

(19) kann nur durch komplexe Argumente erfüllt werden. Das bedeutet aber, daß nur gedämpfte Eigenschwingungen existieren können. Die Dämpfung ist einmal Strahlungsdämpfung, und zweitens bei endlichem Leitvermögen des Zylinders Dämpfung durch Entwicklung Joulescher Wärme. Bei dielektrischen Zylindern ist nur Strahlungsdämpfung vorhanden. Ist ein komplexes $k_1 = p + iq$ (und damit ein k_2) gefunden, das Gleichung (19) erfüllt, so ist:

$$k_1 = p + iq = \frac{s \mu n^3}{c^3} - \frac{4 \pi i \mu n \sigma}{c^3}.$$

Diese Gleichung kann nur durch ein komplexes $n = \alpha \pm i\beta$ erfüllt werden. α ist dann die Frequenz und β die Dämpfung der Eigenschwingung. Physikalisch brauchbar ist nur die Lösung $n = \alpha - i\beta$, wo $\beta > 0$, da sonst die Amplitude unbegrenzt zunimmt. Physikalisch realisierbar sind ungedämpfte Eigenschwingungen nur an dielektrischen Zylindern. Man kann nämlich die nach außen fortschreitende Strahlung, die die Dämpfung verursacht, durch einen in beliebiger Entfernung den dielektrischen Zylinder umgebenden Zylindermantel von ∞ großer Leitfähigkeit wieder zurückwerfen. Man bekommt dann an diesem Mantel stehende Wellen. Die Frequenzen der ungedämpften Eigenschwingungen hängen natürlich von der Entfernung des Mantels von der Zylinderachse ab. Ist diese Entfernung ∞ groß, so erhält man die Bedingungsgleichung für die ungedämpften Eigenschwingungen, wenn man ansetzt:

$$\mathfrak{E}_2 = e^{i n t} \sum_0^{\infty} a_m'' K_m(k_2 r) \cos m \varphi,$$

denn dieser Ansatz liefert im ∞ stehende Wellen. Also wird die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(20) \quad k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1) = 0.$$

Dies stimmt mit dem reellen Teil von (19) überein, wenn man dort reelles Argument annimmt. Da (20) für jedes m

1) Zu beachten ist die formale Übereinstimmung von (19) mit dem Nenner von (17).

∞ viele Wurzeln hat und m von 0 bis ∞ läuft, existieren ∞^2 viele Eigenfrequenzen.

§ 4. Berechnung der magnetischen Feldkomponenten.

Die Komponenten $(\mathfrak{H}_\varphi)_2$ und $(\mathfrak{H}_\varphi)_3$ findet man aus den Gleichungen (2). Da kein von der Zeit unabhängiges Magnetfeld vorhanden ist, kann man ohne Hinzufügen einer Integrationskonstante direkt integrieren. Es wird:

$$(21) \quad (\mathfrak{H}_\varphi)_2 = -i \cdot e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m'' J_m'(k_2 r) + a_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi,$$

$$(22) \quad (\mathfrak{H}_\varphi)_3 = -\frac{i}{r k_2} e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r)\} m \sin m\varphi.$$

§ 5. Berechnung des Strahlungsdruckes im \parallel Fall.

Es soll berechnet werden das zeitliche Mittel des von der einfallenden Welle auf den Zylinder ausgeübten Strahlungsdruckes. Die Kraft, die von elektromagnetischer Strahlung auf einen materiellen Körper ausgeübt wird, setzt sich zusammen aus den Maxwellschen Spannungen, die über eine beliebige, den Körper umschließende Fläche zu integrieren sind, und aus der Änderung des elektromagnetischen Impulses innerhalb dieser Fläche. Da im vorliegenden Falle nur das zeitliche Mittel des Druckes berechnet werden soll und ein rein periodischer Zustand vorliegt, ist der Druck, der von der Änderung des Impulses herröhrt, im Mittel gleich 0; die Integration über die Maxwellschen Spannungen gibt also das zeitliche Strahlungsdruckmittel. Als Integrationsfläche wird ein dem materiellen Zylinder koaxialer Zylindermantel mit dem Radius r , wo $r > \varrho_1$ ist, gewählt. Die Maxwellschen Spannungen sind:¹⁾

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}_x^e = \frac{\epsilon}{8\pi} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) \mathfrak{n}_x + \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y \mathfrak{n}_y + \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z \mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{T}_x^m = \frac{\mu}{8\pi} (\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) \mathfrak{n}_x + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y \mathfrak{n}_y + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z \mathfrak{n}_z. \end{array} \right.$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß nur ein Druck \parallel der

1) Vgl. z. B. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität (Teubner, 5. Aufl.) Bd. I, S. 154—155, Formeln 149, und S. 211, Formeln 177.

2) \mathfrak{n} ist der normale Einheitsvektor.

x -Achse resultieren kann, die \mathfrak{T}_y und \mathfrak{T}_z brauchen also nicht berücksichtigt zu werden. Ist

$$\mathfrak{T}_x + \mathfrak{T}_x^m = X_{n\parallel}$$

(X Komponente der Flächenkraft auf ein Flächenstück von der Größe 1 und der Normale n), so ist die x -Komponente der Flächenkraft auf ein Zylinderstück von der Länge 1:

$$X_{\parallel} = \int X_{n\parallel} d\sigma = \int_0^{2\pi} X_{n\parallel} \cdot r \cdot d\varphi \quad (d\sigma \text{ Oberflächenelement}).$$

Im vorliegenden Falle fällt r mit n zusammen; also ist:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(n, x) = \cos \varphi, \\ n_y &= \cos(n, y) = \sin \varphi, \\ n_z &= \cos(n, z) = 0. \end{aligned}$$

Es sei

$$(24) \quad \bar{X}_{\parallel} = \frac{1}{T} \int_0^T X_{\parallel} dt,$$

worin T die Schwingungsdauer bedeutet, der zeitliche Mittelwert von X_{\parallel} . Es ist:

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_2, \quad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Auf der Integrationsfläche ist $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$, also wird:

$$X_{n\parallel}^* = -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}_2^2 \cos \varphi + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H}_x)_2^2 - (\mathfrak{H}_y)_2^2 \cos \varphi + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{H}_x)_2 (\mathfrak{H}_y)_2 \sin \varphi.$$

Es ist:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}_x)_2 &= (\mathfrak{H}_r)_2 \cos \varphi - (\mathfrak{H}_{\varphi})_2 \sin \varphi, \\ (\mathfrak{H}_y)_2 &= (\mathfrak{H}_r)_2 \sin \varphi + (\mathfrak{H}_{\varphi})_2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Damit wird:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{n\parallel} &= \frac{1}{8\pi} \left\{ -\mathfrak{E}_2^2 \cos \varphi + (\mathfrak{H}_r)_2^2 \cos \varphi - (\mathfrak{H}_{\varphi})_2^2 \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - 2(\mathfrak{H}_r)_2 (\mathfrak{H}_{\varphi})_2 \sin \varphi \right\}, \\ \bar{X}_{\parallel} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^{2\pi} r X_{n\parallel} d\varphi = -\frac{r}{8\pi} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^{2\pi} \left\{ \mathfrak{E}_2^2 \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - (\mathfrak{H}_r)_2^2 \cos \varphi + (\mathfrak{H}_{\varphi})_2^2 \cos \varphi + 2(\mathfrak{H}_r)_2 (\mathfrak{H}_{\varphi})_2 \sin \varphi \right\} d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Da die Grenzen konstant sind, können die Integrationen

vertauscht werden. Bezeichnen überstrichene Größen zeitliche Mittelwerte über eine Periode, z. B.:

$$\overline{\mathfrak{E}_2^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{E}_2^2 dt,$$

so wird:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\overline{X}_{\parallel} = \frac{r}{8\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^2} \cos \varphi d\varphi - \frac{r}{8\pi} \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^2} \cos \varphi d\varphi \\ \quad + \frac{r}{8\pi} \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2^2} \cos \varphi d\varphi + \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2 \cdot (\mathfrak{H}_\varphi)_2} \sin \varphi d\varphi. \end{array} \right.$$

$-\overline{X}_{\parallel}$ bedeutet eine Kraft in Richtung der einfallenden Welle.

$$\text{a) Berechnung von } \int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^2} \cos \varphi d\varphi.$$

Es war nach (15)

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} \{ b_m'' J_m + a_m'' Q_m \} \cos m\varphi.$$

Man setze:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_m'' = \alpha_m'' + i\beta_m'', \\ b_m'' = b_m^{(1)} + i b_m^{(2)}. \end{array} \right.$$

Damit wird:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} \left\{ \left(b_m^{(1)} + \frac{\pi}{2} \beta_m'' \right) J_m + \alpha_m'' K_m \right\} \cos m\varphi \\ \quad + i \cdot e^{int} \sum_0^{\infty} \left\{ \left(b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2} \alpha_m'' \right) J_m + \beta_m'' K_m \right\} \cos m\varphi. \end{array} \right.$$

Es sei

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m = \left(b_m^{(1)} + \frac{\pi}{2} \beta_m'' \right) J_m(k_2 r) + \alpha_m'' K_m(k_2 r), \\ B_m = \left(b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2} \alpha_m'' \right) J_m(k_2 r) + \beta_m'' K_m(k_2 r). \end{array} \right.$$

Also wird:

$$(29) \quad \mathfrak{E}_2 = e^{int} \left[\sum_0^{\infty} A_m \cos m\varphi + i \sum_0^{\infty} B_m \cos m\varphi \right].$$

1) Da b_m'' abwechselnd reell oder rein imaginär ist, ist bei gleichem m entweder $b_m^{(1)}$ oder $b_m^{(2)}$ gleich 0.

\mathfrak{E}_3 ist gleich dem reellen Teil dieses Ausdrückes.

Ist $\mathfrak{A} = \Re \{e^{int}(a_1 + i a_2)\}$ $\mathfrak{B} = \Re \{e^{int}(b_1 + i b_2)\}$,
so ist der zeitliche Mittelwert des Produktes:

$$\overline{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}} = \frac{1}{2} \{a_1 b_1 + a_2 b_2\}.$$

Also folgt aus (29):

$$\overline{\mathfrak{E}_3^2} = \frac{1}{2} \left[\left\{ \sum_0^{\infty} A_m \cos m\varphi \right\}^2 + \left\{ \sum_0^{\infty} B_m \cos m\varphi \right\}^2 \right],$$

oder:

$$\overline{\mathfrak{E}_3^2} = \frac{1}{2} \left[\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} A_m A_p \cos m\varphi \cos p\varphi + \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} B_m B_p \cos m\varphi \cos p\varphi \right].$$

$$(30) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_3^2} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left[\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \{A_m A_p + B_m B_p\} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos \varphi d\varphi \right]. \end{cases}$$

Das Integral $\int \cos m\varphi \cos p\varphi \cos \varphi d\varphi$ lässt sich durch partielle Integration bestimmen. Man bekommt in bekannter Weise eine Rekursionsformel, in der das vorliegende Integral durch $\int \sin m\varphi \sin p\varphi \cos \varphi d\varphi$ ausgedrückt wird. Behandelt man das letztere Integral ebenso, so bekommt man schließlich:

$$\begin{aligned} & \int \cos m\varphi \cos p\varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{1 - m^2 - p^2}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2 p^2} \cos m\varphi \cos p\varphi \sin \varphi, \\ &= \frac{2mp}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2 p^2} \sin m\varphi \sin p\varphi \sin \varphi \\ &= \frac{p(1 + m^2 - p^2)}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2 p^2} \cos m\varphi \sin p\varphi \cos \varphi, \\ &= \frac{m(1 - m^2 + p^2)}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2 p^2} \sin m\varphi \cos p\varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Also wird:

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos \varphi d\varphi \\ \quad - \frac{m(1-m^2+p^2)}{(1-m^2-p^2)^2 - 4m^2p^2} \sin 2m\pi \cos 2p\pi \\ \quad + \frac{p(1+m^2-p^2)}{(1-m^2-p^2)^2 - 4m^2p^2} \cos 2m\pi \sin 2p\pi. \end{array} \right.$$

Ist $(1-m^2-p^2)^2 - 4m^2p^2 = 0$, so ist $p = \pm(m \pm 1)$. Für diese Werte wird der Nenner von (31) Null, gleichzeitig wird aber auch der Zähler Null, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Man findet also den Wert des Integrals, wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite von (31) nach p differenziert und dann $p = m+1$ setzt. Führt man die elementare Rechnung durch und wird m eine positive, ganze Zahl, so findet man:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos (m+1)\varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Für $m = 0$ nimmt das Integral den Wert π an. Also:

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos (m+1)\varphi \cos \varphi d\varphi \\ \quad = \pi \text{ für } m = 0 \\ \quad = +\frac{\pi}{2}, \quad m \geq 1 \end{array} \right\} \text{ } m \text{ ganze Zahl.}$$

Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos \varphi d\varphi$ verschwindet für ganzzahliges positives m und p also nur dann nicht, wenn $p = m+1$ ist. Ferner wird der Wert unabhängig von m , wenn man den Fall $m = 0, p = 1$ ausschließt. In (30) verschwindet also die rechte Seite nur für folgende Indexkombinationen m, p nicht: 01, 10, 12, 21, 23, 32, Die Doppelsumme reduziert sich also auf eine einfache Summe und der Faktor $\frac{1}{2}$ fällt weg, da z. B. $A_{23} = A_{32}$ und also:

$$A_{23} + A_{32} = 2A_{23}$$

ist usw. Also wird (30), wenn man noch den Wert des Integrals einsetzt:

$$(33) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_2)^2} \cos \varphi d\varphi \\ = \pi \{ A_0 A_1 + B_0 B_1 \} + \frac{\pi}{2} \sum_1^{\infty} \{ A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \}. \end{array} \right.$$

Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos \varphi d\varphi$ wird später gebraucht, er möge gleich hier mit angegeben werden. Man findet ebenso:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos \varphi d\varphi \\ = \frac{m(1-m^2+p^2)}{(1-m^2-p^2)^2 - 4m^2p^2} \cos 2m\pi \sin 2p\pi, \\ + \frac{p(1+m^2-p^2)}{(1-m^2-p^2)^2 - 4m^2p^2} \sin 2m\pi \cos 2p\pi, \end{array} \right.$$

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin (m+1)\varphi \cos \varphi d\varphi \\ = 0 \text{ für } m=0 \\ = +\frac{\pi}{2} \text{, } \text{, } m \equiv 1 \end{array} \right\} m \text{ ganze Zahl.}$$

b) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^2} \cos \varphi d\varphi$.

Nach (22) ist:

$$(\mathfrak{H}_r)_2 = -\frac{i}{r k_2} e^{int} \sum_0^{\infty} \{ b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r) \} m \cdot \sin m\varphi,$$

durch Einsetzen von (27) und (28) findet man:

$$(36) \quad (\mathfrak{H}_r)_2 = \frac{1}{r k_2} e^{int} \left[\sum_0^{\infty} m B_m \sin m\varphi - i \sum_0^{\infty} m A_m \sin m\varphi \right].$$

Damit wird ebenso wie früher:

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^2} = \frac{1}{2r^2 k_2^2} \left\{ \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} p \cdot m \cdot p \{ A_m A_p + B_m B_p \} \sin m\varphi \sin p\varphi \right\}, \\ \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^2} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2r^2 k_2^2} \left\{ \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} p \cdot m \cdot p \{ A_m A_p + B_m B_p \} \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos \varphi d\varphi \right\}. \end{array} \right.$$

Nach (35) verschwindet das Integral nur für $p = m + 1$, bzw. $m = p + 1$ nicht. Die Doppelsumme reduziert sich also wieder auf eine einfache Summe, die Kombinationen 01, 10 sind Null, die Kombinationen 12, 21, 23, 32 ... sind $= + \pi/2$, also wird (37):

$$(38) \quad \left| \int_0^{2\pi} (\tilde{H}_\varphi)_2^2 \cos \varphi d\varphi \right. \\ \left. = \frac{\pi}{2r^2 k_2^2} \sum_1^{\infty} m(m+1) \{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\}. \right.$$

c) Berechnung von $\int_0^{2\pi} (\tilde{H}_\varphi)_2^2 \cos \varphi d\varphi$.

Nach (21) ist:

$$(\tilde{H}_\varphi)_2 = -i e^{int} \sum_0^{\infty} \{b_m'' J_m'(k_2 r) + a_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi.$$

Wende ich wieder Gleichung (27) an und setze ich:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m' = \left(b_m^{(1)} + \frac{\pi}{2} \beta_m''\right) J_m' + \alpha_m'' K_m', \\ B_m' = \left(b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2} \alpha_m''\right) J_m' + \beta_m'' K_m', \end{array} \right.$$

so wird:

$$(40) \quad (\tilde{H}_\varphi)_2 = e^{int} \left\{ \sum_0^{\infty} B_m' \cos m\varphi - i \sum_0^{\infty} A_m' \cos m\varphi \right\}.$$

Daraus folgt wieder:

$$\int_0^{2\pi} (\tilde{H}_\varphi)_2^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} p \{A_m' A_p' + B_m' B_p'\} \\ \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Nach (32) wird:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} (\tilde{H}_\varphi)_2^2 \cos \varphi d\varphi = \pi \{A_0' A_1' + B_0' B_1'\} \\ \quad + \frac{\pi}{2} \sum_1^{\infty} \{A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}'\}. \end{array} \right.$$

1) Gleichungen (39) unterscheiden sich von (28) nur dadurch, daß an Stelle der Funktionen J und K ihre Ableitungen treten.

$$\text{d) Berechnung von } \int_0^{2\pi} (\tilde{\Phi}_r)_2 \cdot (\tilde{\Phi}_\varphi)_2 \sin \varphi d\varphi.$$

Nach (36), (40) wird:

$$\int_0^{2\pi} (\tilde{\Phi}_r)_2 \cdot (\tilde{\Phi}_\varphi)_2 \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2r k_3} \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} p \{ m A_m A_p' + m B_m B_p' \} \int_0^{2\pi} \sin m \varphi \cos p \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

Durch partielle Integration des unbestimmten Integrals findet man:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \sin m \varphi \cos p \varphi \sin \varphi d\varphi = m \int_0^{2\pi} \cos m \varphi \cos p \varphi \cos \varphi d\varphi \\ \quad - p \int_0^{2\pi} \sin m \varphi \sin p \varphi \cos \varphi d\varphi. \end{array} \right.$$

Da das vorliegende Integral in m und p nicht mehr symmetrisch ist, müssen die Fälle $p = m + 1$ und $m = p + 1$ unterschieden werden. Durch Beachtung von Gleichung (32) u. (35) findet man:

m	p	$\int_0^{2\pi} \sin m \varphi \cos p \varphi \sin \varphi d\varphi$
0	1	0
$m \geq 1$	$m + 1$	$m \frac{\pi}{2} - (m + 1) \frac{\pi}{2} = - \frac{\pi}{2}$
1	0	$+\pi$
$m \geq 2$	$m - 1$	$m \frac{\pi}{2} - (m - 1) \frac{\pi}{2} = + \frac{\pi}{2}$

Durch (43) findet man also:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} (\tilde{\Phi}_r)_2 \cdot (\tilde{\Phi}_\varphi)_2 \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2r k_3} \left[\pi \{ A_1 A_0' + B_1 B_0' \} \right. \\ \quad \left. + \frac{\pi}{2} \sum_2^{\infty} m \{ A_m A_{m-1}' + B_m B_{m-1}' \} \right. \\ \quad \left. - \frac{\pi}{2} \sum_1^{\infty} m \{ A_m A_{m+1}' + B_m B_{m+1}' \} \right] \end{array} \right.$$

e) Berechnung des Strahlungsdruckes.

Gleichung (26) wird durch (33), (38), (41) und (44):

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\bar{X}_{||} = \frac{r}{8} \{ A_0 A_1 + B_0 B_1 \} + \frac{r}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \} \\ \quad - \frac{1}{16 r k_2^3} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) \{ A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \} \\ \quad + \frac{r}{8} \{ A_0' A_1' + B_0' B_1' \} + \frac{r}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}' \} \\ \quad + \frac{1}{8 k_2} \{ A_1 A_0' + B_1 B_0' \} + \frac{1}{16 k_2} \sum_{m=2}^{\infty} m \{ A_m A_{m-1}' + B_m B_{m-1}' \} \\ \quad - \frac{1}{16 k_2} \sum_{m=1}^{\infty} m \{ A_m A_{m+1}' + B_m B_{m+1}' \}. \end{array} \right.$$

Läßt man jetzt den Radius r der Integrationsfläche ∞ werden, so verschwinden die 2. und die 4. und die 5. Zeile, denn die Ausdrücke $A \cdot A_{m+1}$ usw. verschwinden einzeln wie $1/r$. Man überzeugt sich davon leicht, indem man die asymptotischen Werte (13) in $A_m \cdot A_{m+1}$ usw. einsetzt. Es wird also:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{X}_{||})_{r=\infty} = \frac{r}{8} \{ A_0 A_1 + B_0 B_1 + A_0' A_1' + B_0' B_1' \} \\ \quad + \frac{r}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \\ \quad \quad + A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}' \}. \end{array} \right.$$

Beachtet man Gleichung (28), so wird:

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \\ \quad = (\alpha_m'' \alpha_{m+1}'' + \beta_m'' \beta_{m+1}'') \left(\frac{\pi^2}{4} J_m J_{m+1} + K_m K_{m+1} \right) \\ \quad + \left(\frac{\pi}{2} \alpha_m'' \alpha_{m+1}'' - \frac{\pi}{2} \alpha_m'' \beta_{m+1}'' \right) (J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m) \\ \quad + \left(\frac{\pi}{2} b_m^{(1)} \beta_{m+1}'' + \frac{\pi}{2} b_{m+1}^{(1)} \beta_m'' - \frac{\pi}{2} \alpha_{m+1}'' b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2} \alpha_m'' b_{m+1}^{(2)} \right) J_m J_{m+1} \\ \quad + (\alpha_{m+1}'' b_m^{(1)} + \beta_{m+1}'' b_m^{(2)}) J_m K_{m+1} \\ \quad + (\alpha_m'' b_{m+1}^{(1)} + \beta_m'' b_{m+1}^{(2)}) J_{m+1} K_m. \end{array} \right.$$

Die ersten Klammern mögen der Reihe nach mit e_m , f_m , g_m , h_m , j_m bezeichnet werden, also:

1) $b_m^{(1)} b_{m+1}^{(1)}$ und $b_m^{(2)} b_{m+1}^{(2)}$ sind 0, da immer der eine Faktor 0 ist, denn b_m'' ist reell oder rein imaginär.

$$(47a) \left\{ \begin{array}{l} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} = e_m \left\{ \frac{\pi^2}{4} J_m J_{m+1} + K_m K_{m+1} \right\} \\ \quad + f_m \{ J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m \} \\ \quad + g_m J_m J_{m+1} + h_m J_m K_{m+1} \\ \quad + j_m J_{m+1} K_m. \end{array} \right.$$

Ebenso wird nach (39):

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} A'_m A'_{m+1} + B'_m B'_{m+1} = e_m \left\{ \frac{\pi^2}{4} J'_m J'_{m+1} + K'_m K'_{m+1} \right\} \\ \quad + f'_m \{ J'_m K'_{m+1} - J'_{m+1} K'_m \} \\ \quad + g'_m J'_m J'_{m+1} + h'_m J'_m K'_{m+1} \\ \quad + j'_m J'_{m+1} K'_m. \end{array} \right.$$

Zwischen den Besselschen Funktionen bestehen folgende Rekursionsformeln:

$$(49) \left\{ \begin{array}{l} J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) = J_{m-1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x), \\ J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x). \end{array} \right.$$

Dieselben Formeln gelten für $K_m(x)$.

Schließlich gilt noch:

$$(50) \left\{ \begin{array}{l} J'_m(x) K_m(x) - J_m(x) K'_m(x) = J_m(x) K_{m+1}(x) \\ \quad - J_{m+1}(x) K_m(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Für ∞ Argument wird nach 49:

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} J'_m(k_2 r) = - J_{m+1}(k_2 r) = + J_{m-1}(k_2 r) \text{ und} \\ K'_m(k_2 r) = - K_{m+1}(k_2 r) = + K_{m-1}(k_2 r). \end{array} \right.$$

Für ∞ Argument verschwinden zwar sämtliche Funktionen J_m und K_m , aber $\frac{m}{k_2 r} J_m$ verschwindet von höherer Ordnung als $J_{m+1}(k_2 r)$.

Beachtet man (50) und (51), so wird:

$$(52) \left\{ \begin{array}{l} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} + A'_m A'_{m+1} + B'_m B'_{m+1} \\ \quad = \{2f_m + h_m - j_m\} \{J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m\} \\ \quad = \frac{1}{k_2 r} \{2f_m + h_m - j_m\}. \end{array} \right.$$

Und damit wird der Strahlungsdruck unabhängig von der speziellen Wahl der Integrationsfläche.

Es ist

$$2f_m + h_m - j_m = \{\pi \alpha''_{m+1} \beta''_m - \pi \alpha''_m \beta''_{m+1} + \alpha''_{m+1} b_m^{(1)} \\ + \beta''_{m+1} b_m^{(2)} - \alpha''_m b_{m+1}^{(1)} - \beta''_m b_{m+1}^{(2)}\}.$$

Also wird (46)

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\bar{X}_{\parallel} = \frac{1}{8k_2} \{\pi \alpha''_1 \beta''_0 - \pi \alpha''_0 \beta''_1 + \alpha''_1 - 2\beta_0\} \\ + \frac{1}{16k_2} \sum_1^{\infty} \{\pi \alpha''_{m+1} \beta''_m - \pi \alpha''_m \beta''_{m+1} + \alpha''_{m+1} b_m^{(1)} \\ + \beta''_{m+1} b_m^{(2)} - \alpha''_m b_{m+1}^{(1)} - \beta''_m b_{m+1}^{(2)}\}. \end{array} \right.$$

Und damit ist der Strahlungsdruck für den Fall, daß die elektrische Kraft \parallel der Zylinderachse polarisiert, exakt berechnet.¹⁾

2. Teil.

Die elektrische Kraft ist senkrecht zur Zylinderachse polarisiert.
(\perp Fall.)

§ 6. Das Feld im \perp Falle.

Ist die elektrische Kraft senkrecht zur Zylinderachse polarisiert, so verschwinden \mathfrak{H}_r , \mathfrak{H}_φ und \mathfrak{E}_z und die Ableitungen nach z. Gleichungen (1) reduzieren sich also:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_\varphi = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r}, \\ b) \quad \frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_r = +\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi}, \\ c) \quad \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{1}{r} \mathfrak{E}_\varphi - \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi}. \end{array} \right.$$

Man differenziere a, b, c nach resp. r , φ , t und setze in c ein:

$$\frac{s\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left\{ \frac{1}{r} \mathfrak{E}_\varphi + \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi} \right\} \\ = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \varphi^2}.$$

Die Klammer ist aber gleich $-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$, also:

$$(55) \quad \frac{s\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \varphi^2}.$$

1) Ist die Amplitude der einfallenden Welle nicht = 1, sondern = A , so ist die rechte Seite von (53) noch mit A^2 zu multiplizieren.

Das ist dieselbe Gleichung wie (3), nur daß \mathfrak{E} und \mathfrak{H} vertauscht sind. Setzt man wieder

$$\frac{s \mu n^2}{c^2} - \frac{4 \pi i \mu n \sigma}{c^2} = k^2,$$

so wird (55) allgemein integriert durch:

$$(56) \quad \mathfrak{H} = e^{int} \sum_0^{\infty} \{d_m J_m(kr) + c_m K_m(kr)\} \cos m\varphi.$$

Ebenso wie beim || Fall findet man:

$$(58) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_1 = e^{int} \sum_0^{\infty} d_m' J_m(k_1 r) \cos m\varphi, \\ \mathfrak{H}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} \{d_m'' J_m(k_2 r) + c_m'' Q_m(k_2 r)\} \cos m\varphi. \end{cases}$$

wo $d_0'' = 1$ und $d_m'' = 2i^m$ ist.

Die Koeffizienten d_m' und c_m'' werden durch die Grenzbedingung

$$(59) \quad \begin{cases} (\mathfrak{H}_1)_r = \varrho_1 = (\mathfrak{H}_2)_r = \varrho_1, \\ (\mathfrak{E}_{\varphi 1})_r = \varrho_1 = (\mathfrak{E}_{\varphi 2})_r = \varrho_1 \end{cases}$$

bestimmt.

Es ist nach (54a) und (56)

$$\begin{aligned} \frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_{\varphi}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_{\varphi} &= - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} = - k e^{int} \sum_0^{\infty} \{d J_m' + c_m K_m'\} \cos m\varphi \\ &= - k e^{int} F(r, \varphi). \end{aligned}$$

Ich setze $\mathfrak{E}_{\varphi} = C \cdot k \cdot e^{int} \cdot F(r, \varphi)$. Dann folgt

$$C = \frac{ic}{s n - 4\pi i \sigma},$$

also:

$$(60) \quad (\mathfrak{E}_{\varphi})_1 = \frac{k_1 i \cdot c}{s_1 n - 4\pi i \sigma_1} e^{int} \sum_0^{\infty} d_m' J_m'(k_1 r) \cos m\varphi,$$

$$(61) \quad (\mathfrak{E}_{\varphi})_2 = + i e^{int} \sum_0^{\infty} \{d_m'' J_m'(k_2 r) + c_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi,$$

denn $\varrho_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $k_1 = \frac{n}{c}$.

Also folgt aus (59), wenn nach der bekannten Schlußfolgerung das Summenzeichen weggelassen wird:

$$d' J_{11} = d'' J_{21} + c'' Q_{21}$$

und

$$p_1 d' J_{11}' = d'' J_{21}' + c'' Q_{21}',$$

wenn

$$p_1 = \frac{k_1 e}{s_1 n - 4\pi i \sigma_1}$$

ist

Es folgt:

$$(62) \quad c_m'' = 2i^m \frac{p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)}{J_m(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1) - p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1)}$$

oder

$$(62a) \quad \frac{2i^m}{c_m''} = \frac{J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1)}{p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Für $m = 0$ tritt an Stelle von $2i^m$ der Faktor 1.

§ 7. Eigenschwingungen im \perp Falle.

Die Bedingungsgleichung für Eigenschwingungen erhält man ebenso wie früher:

$$(63) \quad p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) = 0.$$

Als Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen erhält man:

$$(64) \quad k_1 J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1) - \varepsilon_1 k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) = 0,$$

da diese nur an dielektrischen Zylindern möglich sind, also $\sigma_1 = 0$ ist.

§ 8. Berechnung des Strahlungsdruckes im \perp Falle.

Man findet ebenso wie früher:

$$(65) \quad (\mathfrak{E}_r)_2 = + \frac{i}{r k_2} e^{i \omega t} \sum_0^{\infty} m \{ d_m'' J_m(k_2 r) + c_m'' Q_m(k_2 r) \} \sin m \varphi.$$

Nach (23) wird jetzt:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{n\perp} = \frac{1}{8\pi} \{ \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 \} \mathfrak{n}_x + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y \mathfrak{n}_y - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \mathfrak{n}_x \\ \quad = \frac{1}{8\pi} \{ - \mathfrak{H}_2^2 \cos \varphi + (\mathfrak{E}_r)_2^2 \cos \varphi - (\mathfrak{E}_\varphi)_2^2 \cos \varphi \\ \quad \quad - 2(\mathfrak{E}_r)_2 (\mathfrak{E}_\varphi)_2 \sin \varphi \} \end{array} \right.$$

Da \mathfrak{H} , \mathfrak{E}_r , \mathfrak{E}_φ im \perp Falle mit \mathfrak{E} , \mathfrak{H}_r , \mathfrak{H}_φ im \parallel Falle formal übereinstimmen ($\mathfrak{E}_{r\perp}$ und $\mathfrak{E}_{\varphi\perp}$ haben zwar das umgekehrte Vorzeichen wie $\mathfrak{H}_{r\parallel}$ und $\mathfrak{H}_{\varphi\parallel}$), wie man sich aber sofort über-

1) Vgl. Formel (25).

zeugt, ist das gleichgültig), können die Formeln des \parallel Falles sofort auf den \perp Fall übertragen werden. Ist

$$e_m'' = \gamma_m'' + i \delta_m''$$

und

$$d_m'' = d_m^{(1)} + i d_m^{(2)},$$

so wird der Strahlungsdruck:

$$(67) \left\{ \begin{array}{l} -\bar{X}_{\perp} = \frac{1}{8k_2} \{ \pi \gamma_1'' \delta_0'' - \pi \gamma_0'' \delta_1'' + \gamma_1'' - 2 \delta_0'' \} \\ \quad + \frac{1}{16k_2} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \pi \gamma_{m+1}'' \delta_m'' - \pi \gamma_m'' \delta_{m+1}'' + \gamma_{m+1}'' d_m^{(1)} \\ \quad + \delta_{m+1}'' d_m^{(2)} - \gamma_m'' d_{m+1}^{(1)} - \delta_m'' d_{m+1}^{(2)} \}. \end{array} \right.$$

3. Teil.

Numerische Rechnungen.

§ 9. Numerische Berechnung des Strahlungsdruckes auf einen Wasserzyylinder von 1 cm Radius im Vakuum für den \parallel Fall.

Im folgenden wird der Strahlungsdruck auf einen Wasserzyylinder von 1 cm Radius im Vakuum für den \parallel Fall numerisch berechnet. Ich gehe aus von der Formel (53). Man braucht zur Berechnung von $-\bar{X}_{\parallel}$ nur die Kenntnis der Koeffizienten $a_m'' = \alpha_m'' + i \beta_m''$. Für Wasser ist $\varepsilon_1 = 81$, $\mu_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$, also wird Formel (17a):

$$\frac{2i''}{a_m''} = \frac{k_2 J_{11} K_{21}' - k_1 J_{11}' K_{21}}{k_1 J_{11} / J_{21} - k_2 J_{11}' / J_{21}'} + \frac{i\pi}{2}.$$

Da $\varrho_1 = 1$ cm ist, wird $k_2 \varrho_1 = k_2 = \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, wo λ die Länge der einfallenden Welle im Vakuum ist. Ferner ist

$$k_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \frac{n}{c} = 9k_2.$$

$k_1 \varrho_1$ ist das größte auftretende Argument. Die Funktionen J treten in (17a) von den Argumenten $k_1 \varrho_1$ und $k_2 \varrho_1$, die Funktionen K nur vom Argument $k_2 \varrho_1$ auf. Die Werte für $J_0(x)$ und $J_0'(x) = -J_1(x)$ liegen in den Funktionentafeln von Jahnke-Emde bis zum Argument $x = 15,5$ berechnet vor. Ich konnte also den Strahlungsdruck in dem Intervall von 0–1,7 für k_2 (d. h. von 0–15,3 für k_1) berechnen. Die Werte für die $K_0(k_2 \varrho_1)$ und $K_1(k_2 \varrho_1)$ wurden dem gleichen Tafelwerk entnommen. In diesem Intervall konnte die Reihe (53) schon bei

$m = 3$ abgebrochen werden, und zwar genügten diese Glieder schon völlig bei $k_2 = 1,7$. Bei kleinerem k_2 konnte schon eher abgebrochen werden. Da in (53) als Index $m + 1$ auftritt, mußten die Koeffizienten $\alpha_0'' \beta_0''$ bis $\alpha_4'' \beta_4''$ berechnet werden. Die Nullstellen des Zählers von (17.a) geben die Eigenschwingungen des Zylinders. Es wurden zunächst die Koeffizienten α'' und β''

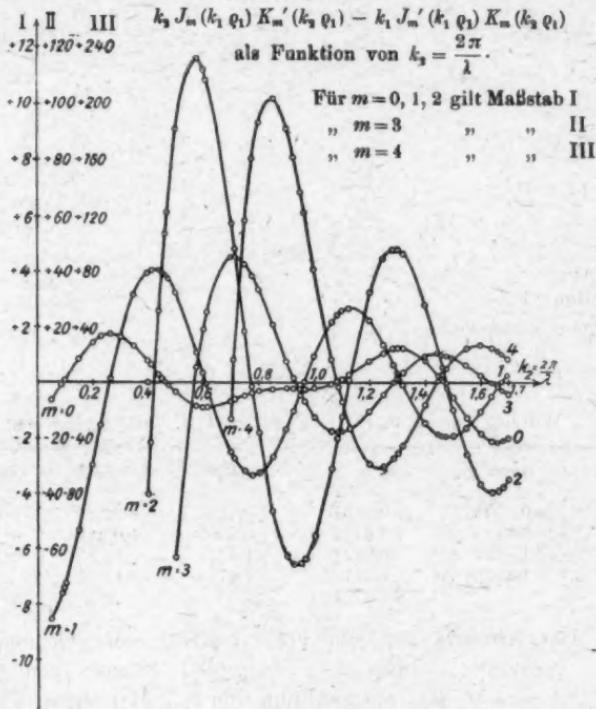


Fig. 2.

($m = 0, 1, \dots, 4$) derart berechnet, daß $k_2 = 0,05, 0,1$ und dann immer um 0,1 wachsend bis 1,7 gesetzt wurde. Daraus wurden annähernd die Eigenschwingungen (für $m = 0, 1, \dots, 4$) berechnet und nun die Koeffizienten für diese in unmittelbarer Nähe der Eigenschwingungen liegenden Werte von k_2 berechnet. Es ergab sich so die Notwendigkeit, die Koeffizienten für $m = 0, 1, \dots, 4$

für 50 verschiedene Wellenlängen zu berechnen. — Die nicht in den Tafeln enthaltenen Funktionswerte der höheren Ordnungen wurden entweder mit Hilfe der Rekursionsformeln (49), oder, wo diese Rechnungsart für höhere Ordnungen und kleine Argumente zu ungenau wurde, aus den Reihen für J_m und J_m' teilweise berechnet und dazwischenliegende Argumente aus den Kurven graphisch interpoliert.¹⁾ Sämtliche numerischen Rechnungen sind mit dem Rechenschieber ausgeführt. In Fig. 2 ist $k_2 J_{11} K_{21}' - k_1 J_{11}' K_{21}$ als Funktion von k_2 aufgetragen. Mit wachsendem m nehmen die Maxima stark zu. Deswegen mußte für $m = 3$ und $m = 4$ je ein kleinerer Maßstab gewählt werden. Die Nullstellen geben die Eigenschwingungen. Merkwürdig ist das Verhalten der Funktion für $m = 0$ zwischen 0,8 und 1,1. Es wird später gezeigt werden, daß sich die Koeffizienten α_0'' und β_0'' so verhalten, als ob bei $k_2 = 0,8$ eine Eigenschwingung sei. In der folgenden Tabelle 1 sind die Werte von k_2 , die Eigenschwingungen entsprechen, für $m = 0$ bis $m = 4$ zusammengestellt.

Tabelle 1.

Wurzeln von: $k_2 J_m(9k_2) K_m'(k_2) - 9k_2 J_m'(9k_2) K_m(k_2) = 0$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$k_2 =$	+0,09587 ²⁾	+0,2631*	+0,4237	+0,5706	+0,7073
	+0,4648*	+0,6102	+0,7752	+0,9324	+1,0825
	+1,0709	+0,9621	+1,1246	+1,2857	+1,4435
	+1,4656	+1,3170	+1,4743	+1,6379	
		+1,6771			

Der Abstand der Wurzeln innerhalb einer Ordnung ist fast konstant. — Fig. 3 enthält den Nenner von (17a): $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}'$ als Funktion von k_2 . Man sieht, wie mit wachsendem m die Kurven sich immer weiter der Abszissenachse anschmiegen. Kurve für $m = 4$ ist in größerem Maßstabe gezeichnet. In den Nullpunkten dieser Funktion für das betreffende m werden α_m'' und β_m'' gleich 0, wie man sich

1) Die durch Kreise bezeichneten Kurvenpunkte sämtlicher Figuren sind berechnet.

2) Die mit * bezeichneten Wurzeln sind schon von Schaefer-Großmann angegeben.

aus (17 a) leicht überzeugt. In den Nullpunkten von $k_1 J_{11}' K_{21} - k_1 J_{11} K_{21}'$ ¹⁾ für das betreffende m werden abwechselnd $\alpha_m'' = 0$ und $\beta_m'' = \pm 4/\pi$ (oder eben umgekehrt). Für $m = 0$ wird in den Eigenschwingungen $\alpha_0'' = 0$ und $\beta_0'' = -2/\pi$ (weil $b_0'' = 1$). Man sieht dieses Verhalten der Koeffizienten in den Figg. 4,

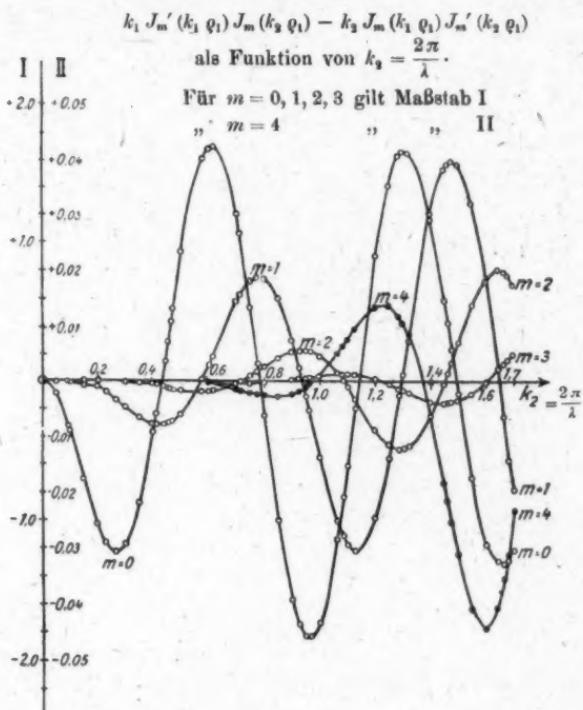


Fig. 3.

5 und 6. Für $m = 3$ und 4 ist der Verlauf der Koeffizienten nicht gezeichnet, weil sie außer an den Stellen der Eigenschwingungen sehr klein bleiben. Man sieht in den Figg. 4 bis 6 deutlich die durch die Eigenschwingungen des Zylinders hervorgerufenen Schwankungen im Verlauf der Koeffizienten. Die Stellen der Eigenschwingungen der betreffenden Ordnung

1) Also in den Eigenschwingungen der betreffenden Ordnung.

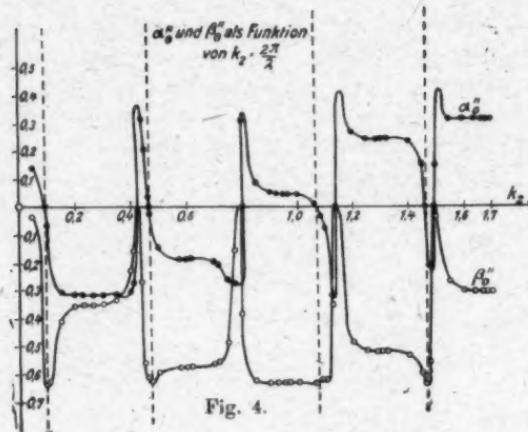


Fig. 4.

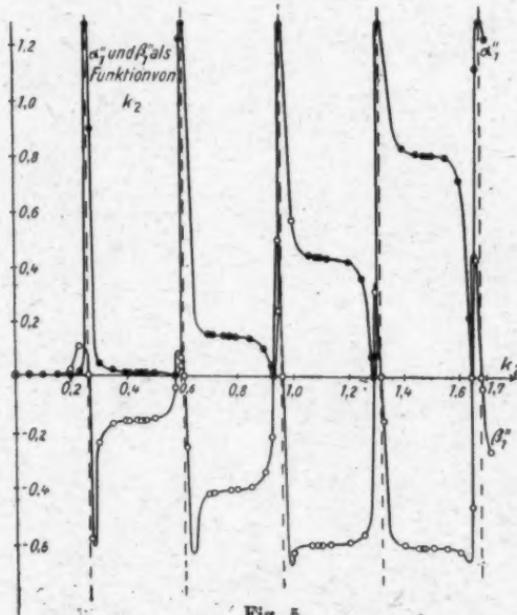


Fig. 5.

sind durch die gestrichelten Geraden bezeichnet. In Fig. 4 sieht man, wie sich bei 0,8 die α_0 und β_0 wie in der Nähe einer Eigenschwingung verhalten. Ferner sieht man, wie sich

die Koeffizienten mit wachsendem m immer weiter der Abszissenachse anschmiegen und nur in der Nähe der Eigenfrequenzen ein beinahe unstetiges Anwachsen zeigen.¹⁾ In den folgenden Tabellen werden die Wurzeln des Nenners von (17a) und die Koeffizienten α_m'' und β_m'' gegeben.

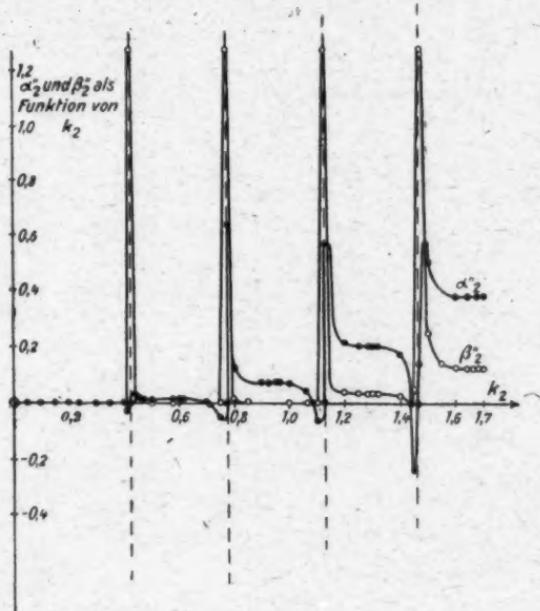


Fig. 6.

Tabelle 2.

Wurzeln von: $9k_3 J_m'(9k_2) J_m(k_3) - k_3 J_m(9k_3) J_m'(k_2) = 0$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$k_2 =$	+0,4282	+0,5708	+0,7097	+0,8294	+0,9745
	+0,7847	+0,9381	+1,0871	+1,2298	+1,3680
	+1,1899	+1,2951	+1,4490	+1,5991	
	+1,4937	+1,6495			

1) Es sei noch bemerkt, daß nur die durch Kreise bezeichneten Kurvenpunkte berechnet sind und Maxima, wie z. B. der Kurve für β_1'' in Fig. 5 bei 0,63 nur qualitativ bewertet werden dürfen.

Die Wurzeln dieser Funktion für die Ordnungen 0, 1, 2 fallen nahe mit den Wurzeln von

$k_2 J_m(9k_2) K_m'(k_2) - 9k_2 J_m'(9k_2) K_m(k_2) = 0$
der Ordnungen 2, bzw. 3 und 4 zusammen. (Vgl. Tabelle 1.)

Tabelle 3.

 α_0'' und β_0'' .

k_2	α_0''	β_0''	k_2	α_0''	β_0''
0,05	+0,1402	-0,03264	0,712	-0,2068	-0,5600
0,1	-0,0657	-0,6310	0,75	-0,2692	-0,4890
0,2	-0,3190	-0,3566	0,776	-0,2754	-0,1582
0,3	-0,3162	-0,3500	0,925	+0,0475	-0,6330
0,4	-0,3052	-0,2288	0,95	+0,0167	-0,6330
0,5	-0,1453	-0,5990	0,963	+0,0464	-0,6330
0,6	-0,1853	-0,5773	1,063	+0,0126	-0,6350
0,7	-0,1986	-0,5675	1,085	-0,0301	-0,6220
0,8	+0,3110	-0,3862	1,127	-0,3164	-0,3520
0,9	+0,0514	-0,6340	1,25	+0,2494	-0,5160
1,0	+0,0453	-0,6330	1,287	+0,2459	-0,5200
1,1	-0,0766	-0,6270	1,32	+0,2466	-0,5195
1,2	+0,2694	-0,4875	1,449	+0,1552	-0,5980
1,3	+0,2466	-0,5199	1,461	+8,43 · 10 ⁻³	-0,6360
1,4	+0,2354	-0,5325	1,475	-0,2076	-0,5600
1,5	+0,1501	-0,0376	1,641	+0,3180	-0,3054
1,6	+0,3178	-0,3001	1,679	+0,3182	-0,3061
1,7	+0,3180	-0,3058	0,15	-0,3042	-0,4112
0,096	-0,002422	-0,6365	0,35	-0,3176	-0,3334
0,266	-0,3166	-0,3514	0,85	+0,0373	-0,6250
0,45	+0,2058	-0,5655	1,55	+0,3144	-0,2692
0,461	+0,0354	-0,6165	1,665	+0,3179	-0,3052
0,468	-0,0258	-0,6260	0,41	-0,2756	-0,1595
0,577	-0,1849	-0,5775	0,44	+0,3141	-0,2680
0,612	-0,1858	-0,5770	0,28	-0,3168	-0,3526

Tabelle 4.

 α_1'' und β_1'' .

k_2	α_1''	β_1''	k_2	α_1''	β_1''
0,05	+3,864 · 10 ⁻⁹	+7,02 · 10 ⁻⁵	1,1	+0,4299	-0,6020
0,1	+1,151 · 10 ⁻⁶	+1,211 · 10 ⁻³	1,2	+0,4165	-0,5975
0,2	+2,526 · 10 ⁻⁴	+1,795 · 10 ⁻³	1,3	+0,0772	+0,3036
0,3	+0,0438	-0,2322	1,4	+0,8240	-0,6080
0,4	+0,0191	-0,1547	1,5	+0,8030	-0,6155
0,5	+0,0171	-0,1467	1,6	+0,7095	-0,6325
0,6	+0,0408	+0,0708	1,7	+1,2120	-0,2740
0,7	+0,1565	-0,4180	0,096	+7,41 · 10 ⁻⁷	+9,71 · 10 ⁻⁴
0,8	+0,1462	-0,4055	0,266	+0,9010	-0,5800
0,9	+0,1001	-0,3492	0,45	+0,01900	-0,1560
1,0	+0,5645	-0,6330	0,461	+0,01890	-0,1588

Tabelle 4 (Fortsetzung).

α_i'' und β_i'' .

k_2	α_1''	β_1''	k_3	α_3''	β_3''
0,468	+0,01867	-0,1529	1,32	+1,252	-0,1583
0,577	+1,163 · 10 ⁻³	+0,03846	1,449	+0,8000	-0,6150
0,612	+1,222	-0,2514	1,461	+0,8080	-0,6150
0,712	+0,1524	-0,4135	1,475	+0,7995	-0,6150
0,75	+0,1468	-0,4065	1,641	+0,2101	-0,4725
0,776	+0,1461	-0,4060	1,679	+1,272	-0,04075
0,925	+0,0875	-0,2154	0,15	+4,15 · 10 ⁻⁵	+7,27 · 10 ⁻³
0,95	+0,2390	+0,4970	0,35	+0,02136	-0,1635
0,963	+1,268	-0,0882	0,85	+0,1898	-0,3984
1,083	+0,4400	-0,6055	1,55	+0,7890	-0,6185
1,085	+0,4385	-0,6025	1,665	+1,111	+0,4240
1,127	+0,4280	-0,6015	0,41	+0,01911	-0,1549
1,25	+0,3526	-0,5700	0,44	+0,01911	-0,1549
1,287	+0,0730	-0,2964	0,23	+9,79 · 10 ⁻⁵	+0,1118

Tabelle 5.

α_2'' und β_2'' .

k_2	α_2''	β_2''	k_3	α_3''	β_3''
0,05	-5,065 · 10 ⁻⁹	+2,016 · 10 ⁻¹⁷	0,712	-9,625 · 10 ⁻⁴	+7,280 · 10 ⁻⁷
0,1	-3,279 · 10 ⁻⁷	+8,45 · 10 ⁻¹⁴	0,75	-0,04945	+1,916 · 10 ⁻⁵
0,2	-3,276 · 10 ⁻⁵	+8,41 · 10 ⁻¹⁰	0,776	+0,6360	+0,6650
0,3	-5,72 · 10 ⁻⁴	+2,572 · 10 ⁻⁷	0,925	+0,0700	+3,85 · 10 ⁻⁸
0,4	-0,01425	+1,597 · 10 ⁻⁴	0,95	+0,0715	+4,01 · 10 ⁻⁹
0,5	+0,01285	+1,300 · 10 ⁻⁴	0,963	+0,0705	+3,92 · 10 ⁻⁹
0,6	+1,011 · 9	+1,114 · 10 ⁻⁴	1,063	+0,0436	+1,495 · 10 ⁻⁹
0,7	+3,398 · 10 ⁻³	+9,05 · 10 ⁻⁶	1,085	+6,42 · 10 ⁻³	+3,238 · 10 ⁻⁵
0,8	+0,1227	+0,01194	1,127	+0,5605	+0,9385
0,9	+0,07080	+3,96 · 10 ⁻³	1,25	+0,1989	+0,0318
1,0	+0,06840	+3,67 · 10 ⁻³	1,287	+0,1971	+0,0312
1,1	-0,0690	+3,22 · 10 ⁻³	1,32	+0,1970	+0,0313
1,2	+0,2100	+0,03566	1,449	+4,925 · 10 ⁻⁵	+1,90 · 10 ⁻⁸
1,3	+0,1968	+0,03126	1,461	-0,2424	+0,0479
1,4	+0,1720	+0,02874	1,475	+0,1884	+1,259
1,5	+0,5000	+0,2426	1,641	+0,3758	+0,1222
1,6	+0,3754	+0,1223	1,679	+0,3746	+0,1218
1,7	+0,3712	+0,1192	0,15	-4,975 · 10 ⁻⁶	+1,952 · 10 ⁻¹
0,096	-3,248 · 10 ⁻⁷	+8,275 · 10 ⁻¹⁴	0,35	-2,19 · 10 ⁻³	+3,776 · 10 ⁻⁶
0,266	-2,236 · 10 ⁻⁴	+3,98 · 10 ⁻⁸	0,85	+0,0760	+4,54 · 10 ⁻⁸
0,45	+0,02164	+3,684 · 10 ⁻⁴	1,55	+0,3904	+0,1341
0,461	+0,01718	+2,32 · 10 ⁻⁴	1,665	+0,3740	+0,1215
0,468	+0,01598	+2,008 · 10 ⁻⁴	0,41	-0,0286	+6,42 · 10 ⁻⁴
0,577	+0,01166	+1,070 · 10 ⁻⁴	0,44	+0,03038	+7,25 · 10 ⁻⁴
0,612	+0,01178	+1,090 · 10 ⁻⁴	0,23	-8,425 · 10 ⁻⁵	+5,585 · 10 ⁻⁶

Tabelle 6.

 α_3'' und β_3'' .

k_1	α_3''	β_3''	k_2	α_3''	β_3''
0,05	$-2,352 \cdot 10^{-21}$	$-5,475 \cdot 10^{-11}$	0,712	$-2,154 \cdot 10^{-7}$	$+5,285 \cdot 10^{-4}$
0,1	$-2,38 \cdot 10^{-16}$	$-1,741 \cdot 10^{-9}$	0,75	$-2,074 \cdot 10^{-7}$	$+5,185 \cdot 10^{-4}$
0,2	$-9,60 \cdot 10^{-16}$	$-1,108 \cdot 10^{-7}$	0,776	$-1,679 \cdot 10^{-7}$	$+4,625 \cdot 10^{-4}$
0,3	$-1,821 \cdot 10^{-19}$	$-1,520 \cdot 10^{-6}$	0,925	$-6,125 \cdot 10^{-4}$	$-0,02798$
0,4	$-1,91 \cdot 10^{-10}$	$-1,557 \cdot 10^{-5}$	0,95	$-1,924 \cdot 10^{-4}$	$+0,01565$
0,5	$-1,603 \cdot 10^{-8}$	$-1,428 \cdot 10^{-4}$	0,963	$-8,895 \cdot 10^{-5}$	$+0,01062$
0,6	$-7,86 \cdot 10^{-6}$	$+9,675 \cdot 10^{-4}$	1,063	$-8,448 \cdot 10^{-5}$	$+6,615 \cdot 10^{-5}$
0,7	$-2,16 \cdot 10^{-7}$	$+5,25 \cdot 10^{-4}$	1,085	$-3,406 \cdot 10^{-8}$	$+6,585 \cdot 10^{-5}$
0,8	$-1,099 \cdot 10^{-7}$	$+3,74 \cdot 10^{-4}$	1,127	$-3,321 \cdot 10^{-5}$	$+6,505 \cdot 10^{-5}$
0,9	$-1,191 \cdot 10^{-8}$	$-3,90 \cdot 10^{-5}$	1,25	$-3,826 \cdot 10^{-5}$	$-6,975 \cdot 10^{-5}$
1,0	$-4,12 \cdot 10^{-6}$	$+7,24 \cdot 10^{-5}$	1,287	$-0,2521$	$+0,5077$
1,1	$-8,424 \cdot 10^{-6}$	$+6,60 \cdot 10^{-5}$	1,32	$-1,646 \cdot 10^{-8}$	$+0,04575$
1,2	$-1,442 \cdot 10^{-6}$	$+4,28 \cdot 10^{-5}$	1,449	$-7,67 \cdot 10^{-4}$	$+0,08124$
1,3	$-5,38 \cdot 10^{-8}$	$+0,0822$	1,461	$-7,625 \cdot 10^{-4}$	$+0,08118$
1,4	$-7,79 \cdot 10^{-4}$	$+0,03152$	1,475	$-7,585 \cdot 10^{-4}$	$+0,08099$
1,5	$-7,34 \cdot 10^{-4}$	$+0,03054$	1,641	$-0,3168$	$+0,5510$
1,6	$-1,007 \cdot 10^{-6}$	$-1,183 \cdot 10^{-5}$	1,679	$-0,01071$	$+0,1162$
1,7	$-8,10 \cdot 10^{-8}$	$+0,1013$	0,15	$-2,070 \cdot 10^{-16}$	$-1,621 \cdot 10^{-6}$
0,096	$-2,064 \cdot 10^{-15}$	$-1,82 \cdot 10^{-9}$	0,35	$-2,746 \cdot 10^{-11}$	$-5,900 \cdot 10^{-6}$
0,266	$-8,576 \cdot 10^{-13}$	$-6,75 \cdot 10^{-7}$	0,85	$-4,34 \cdot 10^{-8}$	$-2,348 \cdot 10^{-4}$
0,45	$-1,511 \cdot 10^{-9}$	$-4,380 \cdot 10^{-5}$	1,55	$-5,87 \cdot 10^{-4}$	$+0,02614$
0,461	$-2,421 \cdot 10^{-9}$	$-5,55 \cdot 10^{-5}$	1,665	$-0,01549$	$+0,1396$
0,468	$-3,258 \cdot 10^{-9}$	$-6,44 \cdot 10^{-5}$	0,41	$-2,996 \cdot 10^{-10}$	$-1,951 \cdot 10^{-5}$
0,577	$-6,365 \cdot 10^{-6}$	$+2,846 \cdot 10^{-5}$	0,44	$-9,97 \cdot 10^{-10}$	$-3,558 \cdot 10^{-5}$
0,612	$-4,785 \cdot 10^{-7}$	$+7,80 \cdot 10^{-4}$	0,23	$-4,92 \cdot 10^{-14}$	$-2,502 \cdot 10^{-7}$

Bricht man in Formel (53) hinter $m = 3$ ab, so bekommt man:¹⁾

$$(68) \left\{ \begin{array}{l} -\bar{X}_{||} = \frac{1}{16 k_2} \{ 2\pi \alpha_1'' \beta_0'' - 2\pi \alpha_0'' \beta_1'' + 4\alpha_1'' - 4\beta_0'' \\ \quad + \pi \alpha_2'' \beta_1'' - \pi \alpha_1'' \beta_2'' + 4\beta_2'' + \pi \alpha_3'' \beta_3'' - \pi \alpha_2'' \beta_3'' \\ \quad - 4\alpha_3'' + \pi \alpha_4'' \beta_3'' - \pi \alpha_3'' \beta_4'' - 2\beta_4'' \} . \end{array} \right.$$

Setzt man darin die Werte aus den Tabb. 3-7 ein, so erhält man für $-\bar{X}_{||}$ ²⁾ folgende Werte der Tab. 8.

1) $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 0$, $b_1^{(1)} = 0$, $b_1^{(2)} = +2$ usw.

2) $-\bar{X}_{||}$ ist ein Druck in der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle.

Tabelle 7.
 α_4'' und β_4'' .

k_3	α_4''	β_4''	k_3	α_4''	β_4''
0,05	$+8,855 \cdot 10^{-17}$	$-5,495 \cdot 10^{-33}$	0,712	$-1,872 \cdot 10^{-4}$	$-2,754 \cdot 10^{-8}$
0,1	$+1,089 \cdot 10^{-14}$	$-9,325 \cdot 10^{-20}$	0,75	$-3,401 \cdot 10^{-5}$	$-9,125 \cdot 10^{-16}$
0,2	$+7,84 \cdot 10^{-13}$	$-4,880 \cdot 10^{-20}$	0,776	$-2,772 \cdot 10^{-5}$	$-6,045 \cdot 10^{-10}$
0,3	$+8,165 \cdot 10^{-10}$	$-5,245 \cdot 10^{-19}$	0,925	$-2,074 \cdot 10^{-5}$	$-3,381 \cdot 10^{-10}$
0,4	$+1,562 \cdot 10^{-8}$	$-1,922 \cdot 10^{-16}$	0,95	$-1,426 \cdot 10^{-5}$	$-1,598 \cdot 10^{-10}$
0,5	$+1,876 \cdot 10^{-7}$	$-2,772 \cdot 10^{-14}$	0,963	$-8,435 \cdot 10^{-6}$	$-5,590 \cdot 10^{-11}$
0,6	$+1,929 \cdot 10^{-6}$	$-2,924 \cdot 10^{-13}$	1,063	$+5,975 \cdot 10^{-4}$	$-2,807 \cdot 10^{-7}$
0,7	$+1,103 \cdot 10^{-4}$	$-9,585 \cdot 10^{-9}$	1,085	$-5,950 \cdot 10^{-8}$	$-2,785 \cdot 10^{-5}$
0,8	$-2,584 \cdot 10^{-6}$	$-5,245 \cdot 10^{-10}$	1,127	$-6,115 \cdot 10^{-4}$	$-2,948 \cdot 10^{-7}$
0,9	$-2,390 \cdot 10^{-5}$	$-4,495 \cdot 10^{-10}$	1,25	$-4,625 \cdot 10^{-4}$	$-1,688 \cdot 10^{-7}$
1,0	$+2,782 \cdot 10^{-5}$	$-6,075 \cdot 10^{-10}$	1,287	$-4,420 \cdot 10^{-4}$	$-1,538 \cdot 10^{-7}$
1,1	$-1,108 \cdot 10^{-5}$	$-9,655 \cdot 10^{-7}$	1,32	$-3,914 \cdot 10^{-4}$	$-1,204 \cdot 10^{-7}$
1,2	$-4,670 \cdot 10^{-4}$	$-1,710 \cdot 10^{-7}$	1,449	$-0,01780$	$-2,492 \cdot 10^{-4}$
1,3	$-4,295 \cdot 10^{-4}$	$-1,451 \cdot 10^{-7}$	1,461	$-7,215 \cdot 10^{-5}$	$-4,085 \cdot 10^{-5}$
1,4	$+7,455 \cdot 10^{-4}$	$-4,370 \cdot 10^{-7}$	1,475	$-4,385 \cdot 10^{-5}$	$-1,876 \cdot 10^{-5}$
1,5	$-3,768 \cdot 10^{-3}$	$-1,117 \cdot 10^{-6}$	1,641	$-3,198 \cdot 10^{-5}$	$-8,035 \cdot 10^{-6}$
1,6	$-3,222 \cdot 10^{-3}$	$-8,175 \cdot 10^{-6}$	1,679	$-2,976 \cdot 10^{-5}$	$-8,960 \cdot 10^{-6}$
1,7	$-2,608 \cdot 10^{-3}$	$-5,350 \cdot 10^{-6}$	0,15	$+6,380 \cdot 10^{-13}$	$-3,198 \cdot 10^{-20}$
0,096	$+1,237 \cdot 10^{-14}$	$-1,200 \cdot 10^{-23}$	0,35	$+4,080 \cdot 10^{-9}$	$-1,310 \cdot 10^{-17}$
0,266	$+1,322 \cdot 10^{-10}$	$-1,373 \cdot 10^{-20}$	0,85	$-2,554 \cdot 10^{-5}$	$-5,125 \cdot 10^{-10}$
0,45	$+5,585 \cdot 10^{-6}$	$-2,410 \cdot 10^{-15}$	1,55	$-3,262 \cdot 10^{-5}$	$-8,370 \cdot 10^{-6}$
0,481	$+7,280 \cdot 10^{-8}$	$-4,170 \cdot 10^{-15}$	1,665	$-3,092 \cdot 10^{-5}$	$-7,525 \cdot 10^{-6}$
0,468	$+8,740 \cdot 10^{-8}$	$-5,995 \cdot 10^{-15}$	0,41	$+1,878 \cdot 10^{-6}$	$-2,758 \cdot 10^{-16}$
0,577	$+1,119 \cdot 10^{-6}$	$-9,820 \cdot 10^{-15}$	0,44	$+4,075 \cdot 10^{-8}$	$-1,310 \cdot 10^{-15}$
0,612	$+2,808 \cdot 10^{-6}$	$-5,855 \cdot 10^{-19}$	0,23	$+2,166 \cdot 10^{-11}$	$-3,694 \cdot 10^{-22}$

Tabelle 8.

k_3	$-\bar{X}_{11}$	k_3	$-\bar{X}_{11}$	k_3	$-\bar{X}_{11}$	k_3	$-\bar{X}_{11}$
0,05	$+0,1633$	1,3	$+0,09335$	0,75	$+0,1229$	1,475	$+0,1449$
0,1	$+1,578$	1,4	$+0,1452$	0,776	$+0,1541$	1,641	$+0,1021$
0,2	$+0,4570$	1,5	$+0,1294$	0,925	$+0,1739$	1,679	$+0,1416$
0,3	$+0,2119$	1,6	$+0,1340$	0,95	$+0,1654$	0,15	$+0,6915$
0,4	$+0,1054$	1,7	$+0,1434$	0,963	$+0,1663$	0,85	$+0,1878$
0,5	$+0,2829$	0,096	$+1,659$	1,063	$+0,1476$	0,85	$+0,1950$
0,6	$+0,2510$	0,268	$+0,4385$	1,085	$+0,1384$	1,55	$+0,1426$
0,7	$+0,1616$	0,45	$+0,3422$	1,127	$+0,1331$	1,665	$+0,1179$
0,8	$+0,1916$	0,461	$+0,3384$	1,25	$+0,1484$	0,41	$+0,06765$
0,9	$+0,1798$	0,468	$+0,3308$	1,287	$+0,1557$	0,44	$+0,2002$
1,0	$+0,1620$	0,577	$+0,2554$	1,32	$+0,1483$	0,23	$+0,4485$
1,1	$+0,1354$	0,612	$+0,2502$	1,449	$+0,1368$		
1,2	$+0,1589$	0,712	$+0,1562$	1,461	$+0,1348$		

In Fig. 7 ist der Strahlungsdruck als Funktion von $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ graphisch dargestellt. Die über der Abszissenachse gezeichneten gestrichelten Geraden bezeichnen die Stellen der Eigen-

schwingungen, diejenigen unterhalb der Abszissenachse die Nullstellen von $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}' = 0$, die Länge der Geraden bezeichnet ihre Ordnung m . An den letzteren Nullstellen werden, wie bewiesen, die betreffenden α_m'' und β_m'' gleich 0; ist m klein, so bewirkt dieses Verhalten ein Kleinwerden des Strahlungsdruckes. Man sieht in Fig. 7 deutlich den Einfluß der Eigenschwingungen auf den Strahlungsdruck,

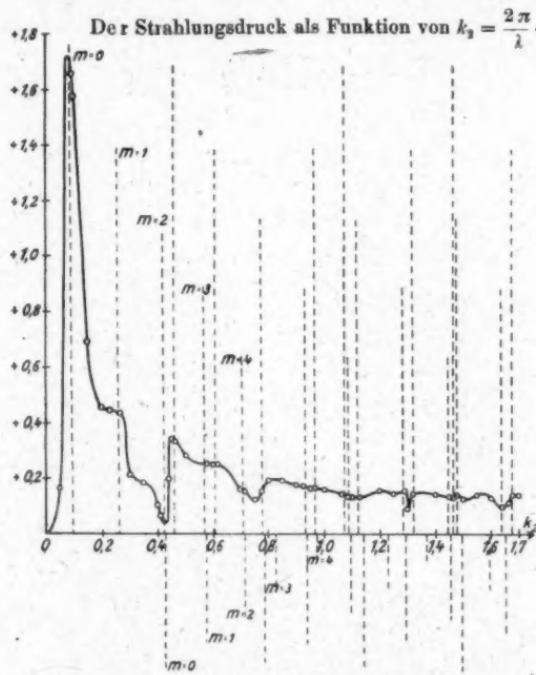


Fig. 7.

z. B. das Anwachsen bei der 1. und 2. Eigenschwingung der Ordnung 0 ($k_2 = 0,09587$ und $k_3 = 0,4648$) und die Verzögerung des Druckabfalles bei der 1. Eigenschwingung von $m = 1$ ($k_3 = 0,2631$). Ebenso sieht man ein deutliches Minimum bei $k_2 = 0,4282$ (1. Nullstelle von $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}' = 0$ für $m = 0$). Im weiteren Verlauf der Kurve verwischt sich der Einfluß dieser Nullstellen und der Eigenschwingungen mehr,

offenbar lagern sich zu viele derartige Einflüsse übereinander. Merkwürdig ist das Minimum bei $k_3 = 1,3$. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich bei Berechnung von noch mehr Kurvenpunkten noch mehr derartige Extrema zeigen.

§ 10. Ergebnisse.

In der vorliegenden Arbeit habe ich exakte Formeln für den Strahlungsdruck abgeleitet, den eine ebene, elektromagnetische Welle auf die Längeneinheit eines Kreiszylinders aus beliebigem Material ausübt, wenn die elektrische Kraft

- a) parallel,
- b) senkrecht

zur Zylinderachse polarisiert ist. Der Strahlungsdruck wurde dann für einen Wasserzylinder von 1 cm Radius für 50 verschiedene Längen der einfallenden Welle berechnet, und zwar variierte die Wellenlänge von $\lambda = 125,6$ cm bis $\lambda = 3,7$ cm. Es zeigt sich in diesem Intervall eine starke Beeinflussung des Strahlungsdruckes durch die Eigenschwingungen, der Druck wirkt in der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle.

Anhang.

Im Anhang soll noch der experimentell wichtige Fall behandelt werden, daß zwei koaxiale Zylinder aus beliebigem

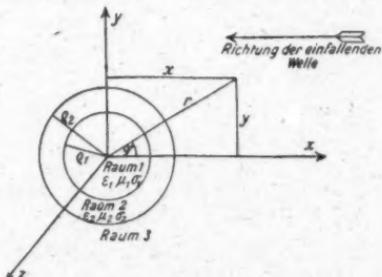


Fig. 8.

Material das Feld stören. Der innerste Raum (Raum 1) habe die Konstanten $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, der Zylinderring (Raum 2) $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, der Außenraum (Raum 3) $\epsilon_3 = 1, \mu_3 = 1, \sigma_3 = 0$.

§ 11. Das Feld im \parallel Falle.

Man kann die Integration der Gleichungen unverändert von dem Falle eines Zylinders übernehmen. Im Raum 1 bzw. 2, 3 seien die Konstanten a', b' bzw. a'', b'' und a''', b''' . Allgemeines Integral war nach (7):

$$\mathfrak{E} = e^{int} \sum_0^{\infty} \{ b_m J_m(kr) + a_m K_m(kr) \} \cos m\varphi.$$

Es wird also:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^{\infty} b_m' J_m(k_1 r) \cos m\varphi, \\ \mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^{\infty} \{ b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' K_m(k_2 r) \} \cos m\varphi, \\ \mathfrak{E}_3 = e^{int} \sum_0^{\infty} \{ b_m''' J_m(k_3 r) + a_m''' Q_m(k_3 r) \} \cos m\varphi. \end{array} \right.$$

Bei \mathfrak{E}_3 muß wieder wegen der Ausstrahlungsbedingung Q_m für K_m gesetzt werden, bei \mathfrak{E}_2 liegt kein Grund vor, die Formel (7) zu ändern. Die Grenzbedingungen lauten:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{E}_1)_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_1}, \quad (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_2} = (\mathfrak{E}_3)_{r=\varrho_2}, \\ (\mathfrak{H}_{\varphi_1})_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_1}, \quad (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_2} = (\mathfrak{H}_{\varphi_3})_{r=\varrho_2}, \\ \text{oder dafür nach Formel (2)} \\ \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r} \right)_{r=\varrho_1} = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r} \right)_{r=\varrho_1}, \quad \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r} \right)_{r=\varrho_2} = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial r} \right)_{r=\varrho_2} \\ \text{und} \\ \mathfrak{E}_{\varrho_{r=\infty}} = e^{int} e^{ikr \cos \varphi}. \end{array} \right.$$

Es ist jetzt:

$$k_1^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1 n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu_1 n \sigma_1}{\sigma^2},$$

$$k_2^2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2 n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu_2 n \sigma_2}{\sigma^2},$$

$$k_3^2 = \frac{n^2}{\sigma^2}.$$

Die Grenzbedingungen (70) liefern (in abgekürzter Bezeichnung):

$$(71) \quad \begin{cases} b' J_{11} = b'' J_{21} + a'' K_{31}, \\ b'' J_{22} + a'' K_{23} = b''' J_{32} + a''' Q_{33}, \\ \frac{k_1}{\mu_1} b' J_{11}' = \frac{k_2}{\mu_2} \{ b'' J_{21}' + a'' K_{21}' \}, \\ \frac{k_2}{\mu_2} \{ b'' J_{22}' + a'' K_{22}' \} = k_3 \{ b''' J_{32}' + a''' Q_{33}' \}. \end{cases}$$

Man findet: $b_0''' = 1$, $b_m''' = 2i^m$ und:

$$(72) \quad \begin{cases} \frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' K_{32} - k_3 J_{23} K_{32}' \} \left\{ \frac{k_2}{\mu_2} J_{11}' K_{31}' - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{31} \right\} \\ + \left\{ \frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' K_{32} - k_3 K_{23} K_{32}' \right\} \left\{ \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{31}' \right\} + \frac{i\pi}{2} \cdot 1) \\ \frac{2i^m}{a_m''' =} \\ \left\{ k_3 J_{22} J_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{23}' J_{32} \right\} \left\{ \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{31}' - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{31} \right\} \\ + \left\{ k_3 J_{22}' K_{32} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{23} K_{32}' \right\} \left\{ \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{31}' \right\} \end{cases}$$

Für kleine Werte von $\varrho_2 - \varrho_1 = \Delta$, die experimentell vorkommen, wenn man z. B. das Feld untersucht, das durch einen in einer Röhre eingeschlossenen Flüssigkeitszylinder gestört wird, findet man einen Näherungswert für (72), wenn man für das Argument $k_2 \varrho_2 = k_2 \varrho_1 + k_2 \Delta$ nach Taylor entwickelt und die höheren Potenzen von Δ vernachlässigt. Die Rechnung ist elementar, aber ziemlich umständlich. Nach (50) ist:

$$J_m'(x) K_m(x) - J_m(x) K_m'(x) = -\frac{1}{x},$$

Differentiation liefert

$$J_m''(x) K_m(x) - J_m(x) K_m''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Durch Differentiation und Anwendung der Rekursionsformeln lässt sich zeigen, daß

$$J_m''(x) K_m'(x) - J_m'(x) K_m''(x) = \frac{x^3 + 2m - m^2}{x^3}$$

ist. Mit diesen Formeln erhält man die Näherungsformel für kleines Δ :

$$(73) \quad \begin{cases} \frac{2i^m}{a_m''' =} = \frac{k_3 J_{11} K_{31}' - k_1 J_{11}' K_{31}}{k_1 J_{11}' J_{31} - k_3 J_{11} J_{31}'} \\ + \frac{J_{11}^2 (k_2^2 - k^2)}{q_1 (k_1 J_{11}' J_{31} - k_3 J_{11} J_{31}')^2} \cdot \Delta + \frac{i\pi}{2} \cdot 1) \end{cases}$$

1) Für $m = 0$ heißt die linke Seite $\frac{1}{a_0'''}$.

Hier ist $\mu_1 = \mu_2 = 1$ angenommen. Für $\Delta = 0$ geht (73) natürlich in (17a) über (der Index 3 ist dann durch 2 zu ersetzen). Für einen Wasserzyylinder von 1 cm Radius ist nach Tab. 3 für $k_3 = 0,8$ ($\lambda \sim 20$ cm)

$$\alpha_0'' = -0,3162 \quad \beta_0'' = -0,3500.$$

Ist dieser Wasserzyylinder in einer Glasküvette von 0,1 cm Wandstärke ($\Delta = 0,1$), so wird nach (73), da $\varepsilon_3 = 6,25$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_0''' + i\beta_0'''} &= -1,419 + \frac{(-0,1424)^2 \cdot 0,09 \cdot 5,25}{-1,1728} \cdot 0,1 + \frac{i\pi}{2} \\ &= -1,419 - 0,000818 + \frac{i\pi}{2}. \end{aligned}$$

Das Korrektionsglied ist also sehr klein (innerhalb der Rechenschiebergenauigkeit). Man sieht, daß die Glasküvette die Koeffizienten der Ordnung 0 nicht wesentlich beeinflußt.

§ 12. Eigenschwingungen im || Falle.

Die Bedingungsgleichungen für die Eigenschwingungen erhält man wieder durch Nullsetzen der äußeren Kraft. Man erhält für gedämpfte Eigenschwingungen:

$$(74) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{k_3}{\mu_3} K_{22}' Q_{32} - k_3 K_{22} Q_{32} \right\} \left\{ \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}' \right\} \\ & - \left\{ k_3 J_{22} Q_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' Q_{32} \right\} \left\{ \frac{k_3}{\mu_3} J_{11} K_{21}' \right. \\ & \left. - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, gelangt man zu der gleichen Bedingungsgleichung, wenn man das Integral auch im Raum 2 in der Form $b_m'' J_m + a_m'' Q_m$ ansetzt. Dies muß ja auch der Fall sein, da sich diese beiden Ansätze im Raum 2 durch nichts unterscheiden. — Bringt man (72) auf die Form $a_m''' = 2i^m \cdot \dots$, so stimmt der Nenner formal mit der linken Seite von (74) überein. (Vgl. Formeln 17 und 19.)

Die Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen in dem schon erläuterten Sinne heißt:

$$(75) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' K_{33} - k_3 K_{22} K_{33}' \right\} \left\{ \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{31} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}' \right\} \\ & - \left\{ k_3 J_{22} K_{33}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{23}' K_{33} \right\} \left\{ \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}' \right. \\ & \left. - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nach dieser Formel sind die Eigenschwingungen eines Wasserzyinders vom Radius $\rho_1 = 1$ cm in einem Glasrohr von 0,5 cm Wandstärke ($\rho_2 = 1,5$ cm) für $m = 0$ berechnet ($\varepsilon_2 = 6,25$): Tab. 9.

Tabelle 9.

		$m = 0$
$k_3 =$	+0,0929	
	+0,4646	
	+0,8739	
	+1,2288	
	+1,5489	

Wie man sieht, tritt eine Aufspaltung der Eigenschwingungen für den Fall des Wasser-Glaszynders nicht ein. Das merkwürdige Verhalten der Kurve *eines* Wasserzynders (vgl. S. 554 und Fig. 2) zwischen 0,8 und 1,0 zeigt übrigens der Wasser-Glaszynder *nicht*. Die Eigenschwingungen eines Wasserzynders vom Radius 1 cm sind in Tab. 1 enthalten, diejenigen für einen Wasserzynder vom Radius 1,5 cm erhält man daraus durch Division mit 1,5. Aus Formel (19) folgt nämlich: Kennt man die Kurve der Eigenschwingungsbedingung für einen Zylinder vom Radius ρ' , so kann man die Kurve auch sofort für einen Zylinder (aus demselben Material!) vom Radius ρ'' zeichnen, indem man Ordinaten und Abszissen mit ρ'/ρ'' multipliziert. Ein Glaszynder hat in dem berechneten Intervall (0,05 bis 1,7) nur eine Eigenschwingung, und zwar ist sie für den Radius 1 cm $k_3 = 1,275$, für den Radius 1,5 cm $k_3 = 0,8435$.

§ 13. Das Feld im \perp Falle.

Sind die Konstanten im Raume 1, 2, 3, bzw. $c'd'$, $c''d'$, $c'''d'''$, so erhält man wie früher:

$$d_0''' = 1, \quad d_n''' = 2i^n.$$

Zur Bestimmung der c_m''' dienen die entsprechenden Grenzbedingungen. Es ist (vgl. S. 550):

$$\mathfrak{E}_\varphi = \frac{k_1 c}{\epsilon n - 4\pi i \sigma} e^{int} \sum_0^{\infty} \{d_m J_m + a_m K_m\} \cos m\varphi.$$

Man erhält aus den Grenzbedingungen formal dieselben Gleichungen wie (71) und kann daher das Resultat direkt übernehmen. Es ist:

$$(76) \left\{ \frac{2i^m}{c_m'''} = \frac{\{p_2 J_{22}' K_{33} - J_{22} K_{33}'\} \{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\} + \{p_2 K_{22}' K_{33} - K_{22} K_{33}'\} \{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\}}{\{J_{22} J_{33}' - p_2 J_{22}' J_{33}\} \{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\}} + \frac{i\pi}{2} + \{J_{33}' K_{22} - p_2 J_{33} K_{22}'\} \{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\} \right.$$

wo

$$p_1 = \frac{k_1 c}{\epsilon_1 n - 4\pi i \sigma_1}, \quad p_2 = \frac{k_2 c}{\epsilon_2 n - 4\pi i \sigma_2}, \quad p_3 = \frac{k_3 c}{n} = 1 \text{ ist.}$$

Für $m=0$ heißt die linke Seite von (76) wieder: $1/c_0'''$. Als Eigenschwingungsbedingung erhält man schließlich:

$$(77) \left\{ \{p_2 K_{22}' Q_{33} - K_{22} Q_{33}'\} \{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\} - \{J_{22} Q_{33}' - p_2 J_{22}' Q_{33}\} \{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\} = 0. \right.$$

(Vgl. Formel (74)). Die Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen erhält man schließlich, indem man in (77) die Funktion Q durch K ersetzt. Mit diesen Gleichungen ist auch der \perp Fall völlig behandelt.

(Eingegangen 21. Dezember 1919.)

**4. Kinematische und energetische
Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit
elektromagnetischer Wellen;
von J. Wallot.**

1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ habe ich den Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Übergangsschicht, in der sich die Dielektrizitätskonstante nach einem ganz bestimmten Gesetze stetig ändert, untersucht und dabei auch die Frage der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in und vor der Schicht behandelt. Aus den für das betrachtete ganz spezielle Problem abgeleiteten Formeln konnte ich u. a. das Ergebnis herauslesen, daß die energetisch definierte Fortpflanzungsgeschwindigkeit V mit den kinematisch definierten mittleren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der elektrischen und der magnetischen Welle $\bar{v}_{el.}$ und $\bar{v}_{magn.}$ in dem durch die folgende Gleichung ausgedrückten Zusammenhange steht:

$$(1) \quad \frac{1}{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{v}_{el.}} + \frac{1}{\bar{v}_{magn.}} \right).$$

Es ist klar, daß die Gültigkeit dieser einfachen Beziehung nicht an die speziellen Voraussetzungen der in der genannten Arbeit durchgeführten Rechnungen geknüpft sein kann. Im folgenden soll genauer untersucht werden, innerhalb welcher Grenzen die Gleichung (1) gilt; im Anschluß daran werde ich noch einige allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Definitionen der Wellengeschwindigkeit machen.

2. Wir betrachten zunächst wie früher den Fall einer einfarbigen geradlinig polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle, die sich in der Richtung der z -Achse fortpflanzen möge. Die Abhängigkeit der Feldvektoren von der Koordinate z lassen wir beliebig, die von der Zeit werde durch den Faktor $e^{i\omega t}$ gegeben. In dem durchstrahlten Medium seien lediglich die Verschiebungsströme zu berücksichtigen.

1) J. Wallot, Ann. d. Phys. 60. S. 734. 1919.

Dann gelten, wenn wir für die Feldvektoren die Ansätze

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} = E_x e^{i(nt + \varphi)}, \\ \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_{y_0} e^{int} = H_y e^{i(nt + \chi)} \end{array} \right.$$

machen (E_x, H_y, φ, χ sind Funktionen von z) und die Differentiation nach z durch einen Strich andeuten, die Gleichungen (ϵ = Dielektrizitätskonstante, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec.):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{i n s}{\epsilon} \mathfrak{E}_{x_0} = - \mathfrak{H}'_y, \\ \frac{i n}{\epsilon} \mathfrak{H}_{y_0} = - \mathfrak{E}'_x. \end{array} \right.$$

Als „kinematisch definierte Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ v habe ich nun¹⁾ den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich ein fest angenommener Wert des betreffenden Feldvektors mit der Zeit verschiebt. Hier nach ist v z. B. für die elektrische Feldstärke in der folgenden Weise sehr einfach zu berechnen: Man fordert

$$d\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}'_{x_0} e^{int} dz + in \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} dt = 0,$$

setzt aus der zweiten Gleichung (3) den Wert für \mathfrak{E}'_{x_0} ein:

$$\mathfrak{H}'_{y_0} e^{int} dz = c \mathfrak{E}'_{x_0} e^{int} dt,$$

lässt das Imaginäre weg:

$$H_y \cos(nt + \chi) dz = c E_x \cos(nt + \varphi) dt,$$

$$v_{el.} = \frac{dz}{dt} = c \cdot \frac{E_x \cos(nt + \varphi)}{H_y \cos(nt + \chi)},$$

bildet den zeitlichen Mittelwert für eine Periode²⁾ und erhält so schließlich

$$(4) \quad v_{el.} = c \frac{E_x}{H_y} \cos(\varphi - \chi).$$

Entsprechend ergibt sich:

$$(5) \quad v_{magn.} = \frac{c}{s} \frac{H_y}{E_x} \cos(\varphi - \chi).$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (1) ein, so folgt für V der Wert:

$$(6) \quad V = 2c \cdot \frac{E_x H_y \cos(\varphi - \chi)}{s E_x^2 + H_y^2}.$$

1) A. a. O. S. 744.

2) Ähnlich wie a. a. O. S. 745.

Das ist aber nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie, wenn man diese als das Verhältnis der mittleren Strahlung zur mittleren Energiedichte definiert.

Die Beziehung (1) folgt also für die einfarbige geradlinig polarisierte ebene Welle mit Notwendigkeit und in sehr einfacher Weise aus den Definitionen und den Maxwell'schen Gleichungen.

3. Es fragt sich nun, ob diese Betrachtung noch verallgemeinert werden kann.

Die nächstliegende Verallgemeinerung wäre die, die Voraussetzung der geradlinigen Polarisation fallen zu lassen, also eine nach wie vor eindimensionale, aber beliebig elliptisch polarisierte Welle der Rechnung zugrunde zu legen. Da sich die kinematische Definition der Geschwindigkeit auf diesen Fall ohne weiteres übertragen läßt, möchte man es auf den ersten Blick für sehr wahrscheinlich halten, daß sich auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen die Gleichung (1) beweisen lassen müsse.

Diese Vermutung bestätigt sich jedoch nicht. Die Durchrechnung, deren Einzelheiten ich nicht wiedergebe, zeigt, daß auf der rechten Seite der Gleichung (1) im Nenner nur dann die mittlere Strahlung und im Zähler nur dann die mittlere Energiedichte auftritt, wenn die elektrische und die magnetische Welle geradlinig und senkrecht zueinander polarisiert sind. Mit dieser Einschränkung kommen wir aber wieder zu unserer einfachen Ableitung in Nr. 2 zurück.

4. Hiernach wäre es zwecklos, eine Erweiterung unserer Betrachtungen auf das dreidimensionale allgemeine Wechselfeld zu versuchen. Das verbietet sich auch deshalb, weil dann zur kinematischen Definition der Geschwindigkeit der in Nr. 2 benutzte allgemeine Grundsatz nicht mehr ausreichen würde. Gerade darin aber, daß sich die Gleichung (1) aus einem so einfachen und unmittelbar einleuchtenden Grundsatz ableiten läßt, sehe ich den Hauptwert der ganzen Betrachtung.

5. Die kinematische Definition der Geschwindigkeit kann natürlich nicht nur auf Einzelwellen, sondern auch auf beliebige Übereinanderlagerungen von Einzelwellen gleicher Schwingungszahl angewandt werden. So habe ich die Ge-

schwindigkeit v beispielsweise berechnet¹⁾ für die „Wellengruppe“, die bei der Reflexion einer Welle an einer Übergangsschicht durch die Übereinanderlagerung der durchgehenden und der reflektierten Einzelwellen entsteht; für die sich so ergebende Geschwindigkeit habe ich die Bezeichnung „Gruppengeschwindigkeit“ eingeführt. Bekanntlich haben zuerst Reynolds und Rayleigh bei Untersuchung der Fortpflanzung von Wellen in einem dispergierenden Medium zwischen Einzelwellengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit unterschieden. Die Übertragung des Ausdrucks Gruppengeschwindigkeit auf das von mir untersuchte Problem ist m. E. berechtigt, obgleich das Wort „Gruppe“ in beiden Fällen in etwas verschiedenem Sinne gebraucht wird; denn beide Gruppengeschwindigkeiten treten rein kinematisch bei Übereinanderlagerung zweier Wellen *neben* den Einzelwellengeschwindigkeiten neu auf, und beide stehen in einem nahen Zusammenhang mit der Energiegeschwindigkeit.²⁾

Weniger brauchbar ist, wie schon früher³⁾ bemerkt, der Begriff der Phasengeschwindigkeit, d. h. der Geschwindigkeit, mit der sich eine fest angenommene Phase mit der Zeit verschiebt. Sie hat nur für solche Wellen Bedeutung, die sich in der komplexen Ebene nahezu durch Kreisbahnen darstellen lassen.⁴⁾ Da sie aber für diese mit unserer Geschwindigkeit v zusammenfällt, ist ihre Einführung nicht nötig.

Clausthal im Harz, Physik. Institut der Bergakademie,
Januar 1920.

1) A. a. O. S. 752.

2) Vgl. z. B. Lord Rayleigh, Proc. of the Lond. Math. Soc. 9. S. 21. 1877 (Scientific Papers, Cambridge 1899. 1. S. 322.)

3) A. a. O. S. 737. Anm.

4) Vgl. a. a. O. S. 744 ff.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

